UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
Ruth Nascimento

Recobrimentos e morfismos irredutíveis

Curitiba, 2011

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
Ruth Nascimento

Recobrimentos e morfismos irredutíveis

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada da Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Matemática Aplicada.

Orientador: Prof. Dr. Edson Ribeiro Alvares.

Curitiba, 2011

Agradecimentos

Agradeço ao meu orientador Prof. Dr. Edson Ribeiro Alvares pela sua grande colaboração na realização deste trabalho. Agradeço também aos outros professores que ajudaram na minha formação acadêmica.

Agradeço aos meus colegas e amigos pelo apoio dado a mim durante toda a minha formação. Sem a ajuda deles eu dificilmente teria chegado até aqui.

Gostaria de agradecer também a minha família, pela compreensão e apoio, e ao Carlos Eduardo Frohlich, por estar ao meu lado, e por suas sempre bem vindas sugestões.

Por fim agradeço ao Programa de Pós Graduação em Matemática Aplicada da Universidade Federal do Paraná e à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, pelo apoio financeiro e sólida formação propiciada.

Resumo

Esta dissertação tem por objetivo o estudo das relações entre recobrimentos e morfismos irredutíveis para se obter informações sobre o tipo de representação de uma k-álgebra de dimensão finito, com k um corpo algebricamente fechado, como feito em [10].

Para isso, começaremos estudando o recobrimento genérico de uma aljava com translação conexa, conceito que é uma generalização da noção de recobrimento universal, dada por Bongartz e Gabriel em [6]. Faremos então uma análise de propriedades envolvendo o grau de um morfismo irredutível entre A-módulos, usando para isso suas relações com o recobrimento genérico da aljava de Auslander-Reiten de A. Com isso, obteremos uma relação entre o grau de um número finito de morfismos irredutíveis em $mod\, A$ e o fato de ser A do tipo de representação finito, no caso em que a álgebra A é conexa.

Palavras-chave: *aljava com translação, recobrimento genérico de aljava com translação, morfismo irredutível, grau de morfismo irredutível.*

Abstract

The purpose of this dissertation is the study of relations between coverings and irreducible morphisms in order to obtain information about the representation type of a finite-dimensional k-algebra, where k is an algebraically closed field, as done in [10].

We shall start by studying the generic covering of a translation quiver, a concept which is a generalization of the idea of universal covering given by Bongartz and Gabriel in [6]. We shall then do an analysis of properties involving the degree of an irreducible morphism between A-modules, using for this its relations with the generic covering of the Auslander-Reiten quiver of A. With this, we shall obtain a relation between the degree of a finite number of irreducible morphisms in *mod A* and the fact that A is of finite-representation type, in the case where the algebra A is connected.

Keywords: *translation quiver, generic covering, irreducible morphism, degree of irreducible morphism.*

Sumário

Introdução

Na teoria de representações estuda-se a categoria *mod A*, dos A-módulos à direita finitamente gerados, para A uma álgebra de artin. Neste estudo, são de fundamental importância os conceitos de morfismo irredutível e sequência quase cindida, tais conceitos tendo sido introduzidos por M. Auslander e I. Reiten em 1972. Esses conceitos são usados para construir a aljava de Auslander-Reiten, um caso particular de aljava com translação.

Mas ao usar a aljava de Auslander-Reiten para buscar descrever *mod A* nos deparamos com o fato de que ela não nos dá todas as informações sobre a categoria, uma vez que nem todo morfismo pode ser construído a partir de morfismos irredutíveis.

Um conceito que pode auxiliar na obtenção de mais informações é o de recobrimento de aljava com translação, conceito trabalhado por Bongartz e Gabriel no artigo [6], onde é descrito o recobrimento universal de uma aljava com translação no caso em que a aljava é sem flechas múltiplas. Destaca-se a importância do trabalho desenvolvido por C. Riedtmann em 1979, ao introduzir a noção de recobrimento de aljava de Auslander-Reiten de uma álgebra do tipo de representação finito, em especial no artigo [16].

Nesta dissertação buscaremos trabalhar com uma generalização do recobrimento universal, encontrada em [10], para o caso em que a aljava pode ter flechas múltiplas, sendo neste caso o recobrimento chamado de recobrimento genérico. As propriedades obtidas a partir de tal recobrimento auxiliarão no estudo da composição de morfismos irredtuíveis.

E justamente na composição de morfismos irredutíveis se baseia outro conceito a ser trabalhado ao longo deste texto, que é o de grau de morfismo irredutível. Tal conceito foi introduzido por S. Liu na busca de obter informações sobre as possíveis formas das componentes da aljava de Auslander-Reiten de uma álgebra de artin do tipo de representação infinito. Como encontrado em [13] (ver também [14]), dizemos que o grau à esquerda de um morfismo irredutível $f : X \to Y$ é infinito se, para qualquer morfismo $g : Z \to X$ pertencente a $R^n(Z,X) \setminus R^{n+1}(Z,X)$, para todo $n > 0$, tem-se que $fg \in R^{n+1}(Z,Y) \setminus R^{n+2}(Z,Y)$. Do contrário, o grau à esquerda de f será o menor $n > 0$ tal que existe morfismo $g : Z \to X$ pertencente a $R^n(Z,X) \setminus R^{n+1}(Z,X)$ tal que $fg \in R^{n+2}(Z,Y)$. Analogamente define-se o grau à direita de f.

A partir dos conceitos de recobrimento genérico de aljava com translação e grau de morfismo irredutível, foi mostrada em [10] uma relação entre o grau à esquerda ou à direita de um número finito de morfismos irredutíveis e o fato de ser a álgebra do tipo de representação finito, no caso em que a algebra é conexa e de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado. Tal resultado mostra assim a relevância do estudo de graus de morfismos irredutíveis para se determinar o tipo de representação de uma álgebra.

O que buscaremos nesta dissertação é descrever o recobrimento genérico, dando algumas propriedades relacionadas a ele, e trabalhar com o conceito de grau de morfismo irredutível, para por fim obter a demonstração do resultado mencionado acima.

O texto está estruturado da seguinte forma:

O primeiro capítulo é destinado a dar as principais definições e propriedades a serem usadas ao longo do texto.

Já no capítulo 2 introduziremos a noção de recobrimento de aljava com translação conexa, e de recobrimento genérico de uma aljava com translação. Verificaremos então que o recobrimento genérico de uma aljava com translação (e a aljava do recobrimento genérico $\tilde{\Gamma}$) satisfaz as seguintes propriedades:

Teorema 0.1. *Sejam Γ uma aljava com translação e $\pi : \tilde{\Gamma} \to \Gamma$ sua cobertura genérica.*
a) Existe uma função comprimento em $\tilde{\Gamma}$. Em particular, $\tilde{\Gamma}$ é com comprimento.
b) Se $\alpha : x \to y$, $\beta : x \to z$ (ou $\alpha : y \to x$, $\beta : z \to x$) são flechas em $\tilde{\Gamma}$ tais que $\pi y = \pi z$, então $y = z$.
c) Para quaisquer vértices $x, y \in \Gamma$, o recobrimento π induz uma bijeção do conjunto de flechas em $\tilde{\Gamma}$ de x para y para o conjunto de flechas de πx para πy.
d) Sejam x e $y \in (\tilde{\Gamma})_0$. Se $u : x = x_0 \to x_1 \to \cdots \to x_l = y$ e $v : x = x'_0 \to x'_1 \to \cdots \to x'_l = y$ são dois caminhos em $\tilde{\Gamma}$ de x para y, e se u é seccional, então $x_i = x'_i, 1 \leq i \leq l-1$. Em particular, todos os caminhos de x para y são seccionais.

O terceiro capítulo é destinado a discutir um funtor que relaciona a categoria $k(\tilde{\Gamma})$ - que é a categoria quociente da categoria $k\tilde{\Gamma}$ cujos objetos são os vértices de $\tilde{\Gamma}$ e o conjunto de morfismos entre dois objetos x e y é o espaço vetorial gerado pelos caminhos de x para y, pelo ideal malha $I_{\tilde{\Gamma}}$ gerado pelos elementos da forma

$\sum_{\alpha:\cdot\to x}(\sigma\alpha)\alpha \in Hom_{k\tilde{\Gamma}}(\tau x, x)$, com x não projetivo e α percorrendo todas as flechas em $\tilde{\Gamma}$ de fim x - com a categoria $ind\ \Gamma$, que é uma subcategoria plena de $ind\ A$ cujos objetos são os A-módulos indecomponíveis em Γ. Assumiremos neste capítulo que k é um corpo algebricamente fechado e que A é uma k-álgebra de dimensão finita. Verificaremos que é sempre possível definir um funtor bem comportado a partir de uma componente da aljava de Auslander-Reiten de uma k-álgebra. Finalizaremos o capítulo verificando que a seguinte propriedade é satisfeita:

Teorema 0.2. *Seja $F : k(\tilde{\Gamma}) \to ind\,\Gamma$ funtor bem comportado, x, y vértices em $\tilde{\Gamma}$ e $n \geq 0$. Então as seguintes aplicações induzidas por F são bijeções de k-espaços vetoriais:*

$$\bigoplus_{Fz=Fy} \tilde{R}^n k(\tilde{\Gamma})(x,z)/\tilde{R}^{n+1} k(\tilde{\Gamma})(x,z) \longrightarrow R^n(Fx,Fy)/R^{n+1}(Fx,Fy)$$

$$\bigoplus_{Fz=Fy} \tilde{R}^n k(\tilde{\Gamma})(z,x)/\tilde{R}^{n+1} k(\tilde{\Gamma})(z,x) \longrightarrow R^n(Fy,Fx)/R^{n+1}(Fy,Fx)$$

Os capítulos anteriores serão aplicados no quarto capítulo, onde começaremos discutindo o conceito de grau de morfismo irredutível. Faremos uso então do recobrimento genérico, através do teorema do capítulo 3 acima mencionado para verificar que:

Teorema 0.3. *Seja A uma k-álgebra de dimensão finita com k algebricamente fechado. Seja $f : X \to Y$ um morfismo irredutível com $X \in ind A$ e Γ uma componente de $\Gamma(mod\,A)$ contendo X e $n \in \mathbb{N}$.*
a) Se $d_l(f) = n$, existe $Z \in \Gamma$ e $h \in R^n(Z,X) \setminus R^{n+1}(Z,X)$ tal que $fh = 0$.
b) Se $d_r(f) = n$, existe $Z \in \Gamma$ e $h \in R^n(Y,Z) \setminus R^{n+1}(Y,Z)$ tal que $hf = 0$.

A partir deste teorema, construiremos a demonstração de um resultado que relaciona o grau de morfismo irredutíveis e o fato de ser a algebra do tipo de representação finito, no caso em que a álgebra é conexa. Nesta demonstração faremos uso apenas de considerações relacionadas ao grau de morfismos irredutíveis, e suas relações com o recobrimento genérico da aljava de Auslander-Reiten da algebra. O resultado é o seguinte:

Teorema 0.4. *Seja A k-álgebra conexa de dimensão finita sobre corpo algebricamente fechado. As seguintes condições são equivalentes:*
a) A é do tipo de representação finito;
b) Para cada A-módulo projetivo P indecomponível, a inclusão $rad(P) \to P$ tem grau à direita finito;
c) Para cada A-módulo injetivo I indecomponível, o quociente $I \to I/soc(I)$ tem grau à esquerda finito;
d) Para cada epimorfismo irredutível $f : X \to Y$ com X ou Y indecomponível, o grau à esquerda de f é finito;
e) Para cada monomorfismo irredutível $f : X \to Y$ com X ou Y indecomponível, o grau à direita de f é finito.

Ou seja, pelas afirmações (b) e (c) do teorema acima, podemos observar então que para determinar o tipo de representação de uma k-álgebra A, precisamos apenas observar o grau de um número finito de morfismos irredutíveis, uma vez que existem apenas finitos A-módulos projetivos (e injetivos) indecomponíveis não isomorfos em $mod\, A$.

Capítulo 1

Preliminares

Daremos aqui as definições e propriedades que assumiremos nos capítulos seguintes. Ao tomarmos uma álgebra de artin A, queremos uma álgebra finitamente gerada como k-módulo, com k um anel de artin comutativo, seguindo a definição de [3]. O produto entre dois elementos a e b em A será denotado por ab. Ao tomarmos um A-módulo, estaremos assumindo se tratar de um A-módulo à direita. Ao escrevermos *rad* A (ou *rad* M) estaremos nos referindo ao radical do A módulo A (ou do A-módulo M), bem como *soc* M se referirá ao socle do A-módulo M.

1.1 Categoria

Definição 1.1. *Uma* **categoria** $\mathscr{C}$ *é dada por:*

1. *Uma classe* $\mathscr{C}_0$ *ou* $Obj\mathscr{C}$ *cujos elementos são chamados* **objetos** *de* $\mathscr{C}$*;*

2. *Para todo par* (x,y) *em* $\mathscr{C}$*, tem-se um conjunto, denotado por* $Hom_{\mathscr{C}}(x,y)$*, cujos elementos são chamados* **morfismos** *(de* $\mathscr{C}$*) de* x *para* y*, tal que se* $(x,y) \neq (x',y')$*, então* $Hom_{\mathscr{C}}(x,y) \cap Hom_{\mathscr{C}}(x',y') = \emptyset$*;*

3. *Para toda tripla de objetos* (x,y,z) *de* $\mathscr{C}$*, existe uma aplicação*

$$\circ : Hom_{\mathscr{C}}(y,z) \times Hom_{\mathscr{C}}(x,y) \longrightarrow Hom_{\mathscr{C}}(x,z)$$

   chamada **composição de morfismos** *e satisfazendo as condições:*

   (a) *Se* $f \in Hom_{\mathscr{C}}(u,v)$*,* $g \in Hom_{\mathscr{C}}(v,w)$*,* $h \in Hom_{\mathscr{C}}(w,x)$*, então* $h(gf) = (hg)f$*;*

(b) *Para cada objeto x de $\mathscr{C}$, existe um morfismo*

$$1_x \in Hom_{\mathscr{C}}(x,x)$$

chamado de **identidade** *ou morfismo identidade em x e tal que se $f \in Hom_{\mathscr{C}}(x,y)$ e $g \in Hom_{\mathscr{C}}(y,x)$, então $f1_x = f$ e $1_x g = g$.*

Sejam x e $y \in \mathscr{C}_0$. Um morfismo $h: x \to x$ é chamado um **endomorfismo** de x. Um morfismo $u: x \to y$ é chamado **monomorfismo** se para cada objeto $z \in \mathscr{C}_0$ e cada par de morfismos $f, g \in Hom_{\mathscr{C}}(z,x)$ tal que $u \circ f = u \circ g$, temos $f = g$. Um morfismo $p: x \to y$ é um **epimorfismo** se para cada objeto $Z \in \mathscr{C}_0$, e cada par de morfismos $f,\ g \in Hom_{\mathscr{C}}(y,z)$ tal que $f \circ p = g \circ p$, temos $f = g$. Finalmente, um morfismo $u: x \to y$ é chamado **isomorfismo** se existe um morfismo $v: y \to x$ tal que $uv = 1_y$ e $vu = 1_x$. Neste caso, x e y são ditos isomorfos, e representamos com a notação $x \simeq y$.

Definição 1.2. *Um* **funtor covariante** *$T: \mathscr{C} \to \mathscr{C}'$ de uma categoria $\mathscr{C}$ para uma categoria $\mathscr{C}'$ é definido associando a cada $x \in \mathscr{C}_0$ um objeto $T(x) \in \mathscr{C}'_0$ e a cada morfismo $h: x \to y \in \mathscr{C}$ um morfismo $T(h): T(x) \to T(y)$ satisfazendo as seguintes condições:*

1. *$T(1_x) = 1_{T(x)}$, para todo $x \in \mathscr{C}_0$;*

2. *Para cada par de morfismos $f: x \to y$ e $g: y \to z$ em $\mathscr{C}$, tem-se a igualdade $T(gf) = T(g)T(f)$.*

Um **funtor contravariante** *$T: \mathscr{C} \to \mathscr{C}'$ de uma categoria $\mathscr{C}$ para uma categoria $\mathscr{C}'$ é definido associando a cada $x \in \mathscr{C}_0$ um objeto $T(x) \in \mathscr{C}'_0$ e a cada morfismo $h: x \to y \in \mathscr{C}$ um morfismo $T(h): T(y) \to T(x)$ satisfazendo as seguintes condições:*

1. *$T(1_x) = 1_{T(x)}$, para todo $x \in \mathscr{C}_0$;*

2. *Para cada par de morfismos $f: x \to y$ e $g: y \to z$ em $\mathscr{C}$, tem-se a igualdade $T(gf) = T(f)T(g)$.*

Definição 1.3. *Seja k um corpo. Uma k-***categoria** *é uma categoria $\mathscr{C}$ tal que:*

1. *$\mathscr{C}_0$ é um conjunto;*

2. *Cada conjunto $Hom_{\mathscr{C}}(x,y)$ é um k-espaço vetorial;*

3. *A composição de morfismos é k-bilinear.*

Definição 1.4. *Seja $\mathscr{C}$ uma k-categoria. Um* **ideal I** *de $\mathscr{C}$ é constituído por subespaços vetoriais $Hom_I(x,y) \subseteq Hom_{\mathscr{C}}(x,y)$, para todo x, $y \in \mathscr{C}_0$, tal que a composição vu de morfismos $u \in Hom_{\mathscr{C}}(x,y)$ e $v \in Hom_{\mathscr{C}}(y,z)$ satisfaz $vu \in Hom_I(x,z)$, se u pertence a $Hom_I(x,y)$ ou v pertence a $Hom_I(y,z)$.*

Exemplo 1.1. *1 - Podemos definir a partir de uma k-álgebra de dimensão finita e básica A uma k-categoria $\mathscr{A}$ da seguinte forma: o conjunto de objetos de $\mathscr{A}$ é formado por um conjunto completo de idempotentes ortogonais primitivos $\{e_1, \cdots, e_n\}$, e, dados e_i, e_j objetos de $\mathscr{A}$, o espaço dos morfismos de e_i para e_j é e_iAe_j, com a composição dada pelo produto definido em A.*

2 - E se temos uma k-Categoria $\mathscr{C}$ com $\mathscr{C}_0$ finito, podemos definir uma k-álgebra (não necessariamente de dimensão finita) $A = \bigoplus_{x,y \in \mathscr{C}_0} Hom_{\mathscr{C}}(x,y)$. O produto em A é a composição de morfismos, quando esta faz sentido, e zero caso contrário. A unidade é dada por $1 = \bigoplus_{x \in \mathscr{C}_0} 1_x$, e o conjunto $\{1_x \mid x \in \mathscr{C}_0\}$ é um conjunto completo de idempotentes ortogonais primitivos.

A categoria a ser usada com mais frequência ao longo do texto é a categoria $mod\,A$, que definiremos agora.

Definição 1.5. *Dada A uma álgebra de artin, a* **categoria dos A-módulos à direita finitamente gerados***, denotada por $mod\,A$, é dada por*

1. *$(mod\,A)_0$ é o conjunto dos A-módulos finitamente gerados.*

2. *Dados M, $N \in (mod\,A)_0$, temos que $Hom_A(M,N)$ é o conjunto dos morfismos de A-módulos entre M e N.*

1.2 Radical

Dados X, $Y \in mod A$, com A álgebra de artin, o conjunto $R(X,Y)$, denotará o radical de $Hom_A(X,Y)$, que é definido da seguinte forma:

Definição 1.6. *Dados X, $Y \in mod\ A$, o radical $R(X,Y)$ de $Hom_A(X,Y)$ é dado pelo conjunto*

$$\{f \in Hom_A(X,Y) \mid 1_Y - fg \text{ é ivertível é direita, para todo } g \in Hom_A(Y,X)\}.$$

Definimos $R^n(X,Y)$ da seguinte forma: $R^0(X,Y) = Hom_A(X,Y)$, $R^1(X,Y) = R(X,Y)$ e $R^{n+1}(X,Y)$ é o conjunto dos morfismos da forma $h = \sum_{i=1}^{r} g_i f_i$, com $g_i \in R^n(Z_i,Y)$ e $f \in R(X,Z_i)$ para $1 \leq i \leq r$, e Z_i indecomponível para todo i, isto é $R^{n+1}(X,Y) = R^n(Z,Y)R(X,Z)$, com $Z = \bigoplus_{i=1}^{r} Z_i$ variando entre os A-módulos finitamente gerados. Já $R^\infty(X,Y) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} R^n(X,Y)$. Temos que $R(X,Y)$ é um ideal.

Se X e Y forem A-módulos indecomponíveis com A k-álgebra e k um corpo, $R(X,Y)$, que neste caso é o conjunto dos morfismos entre X e Y não invertíveis (ver [2], A3.5), coincide com o conjunto dos morfismos que não são epimorfismos que cindem nem são monomorfismos que cindem.

Definição 1.7. *Uma álgebra de artin é dita* **local** *se possui um único ideal à direita maximal.*

Tal definição é equivalente a ter, para cada $x \in A$, x ou $1-x$ invertivel, sendo equivalente também a serem 0 e 1 seus únicos idempotentes, como demonstrado em ([1],VII 6.5 e VII 6.6)

Teorema 1.1. *Seja A uma álgebra de artin. Se X um A-módulo indecomponível e finitamente gerado, então $End_A(X)$ é uma álgebra local.*

Demonstração: Seja e pertencente a $End_A(X)$ um idempotente. Então $1_X = e + (1_X - e)$. Como X é indecomponível, tal decomposição é trivial. Desta forma, e deve ser igual à 1_X ou 0. Portanto, $End_A(X)$ é local □

Teorema 1.2. *Seja M um A-módulo indecomponível e finitamente gerado, com A uma k-álgebra de dimensão finita e básica, e k um corpo algebricamente fechado.*

a) Se f pertence a $End_A(M)$, então ou f é isomorfismo ou f é nilpotente.

b) $End_A(M)/R(M,M) \simeq k$.

Demonstração

a) Como A é uma k-álgebra de dimensão finita, M é um A-módulo de dimensão finita sobre k, pois é finitamente gerado sobre A. Consequentemente, $End_A(M)$ é um k-espaço vetorial de dimensão finita, sendo também um A-módulo finitamente gerado. Disto, a cadeia

$$End_A(M) \supseteq R(M,M) \supseteq \cdots \supseteq (R(M,M))^n \supseteq \cdots$$

estaciona. Desta forma, para algum $m \geq 1$, $(R(M,M))^m = (R(M,M))^m R(M,M)$. Como $R(M,M)$ é finitamente gerado sobre A, também $(R(M,M))^m$ é finitamente gerado sobre A, donde existem $m_1, \cdots, m_s \in (R(M,M))^m$ tais que

$$(R(M,M))^m = m_1 A + \cdots + m_s A.$$

Queremos concluir que $(R(M,M))^m = 0$. Façamos indução em s.

Suponha inicialmente $s = 1$. Então, como $m \geq 1$, $(R(M,M))^m = (R(M,M))^m R(M,M)$, e portanto $m_1 A = m_1 A R(M,M) = m_1 R(M,M)$. Em particular, existe $x_1 \in R(M,M)$ tal que $m_1 = m_1 1 = m_1 x_1$. Daí, $m_1(1 - x_1) = 0$. Como $x_1 \in R(M,M)$, ele é um morfismo não invertível, donde, por ser $End_A(M)$ local, $1 - x_1$ é invertível, e portanto concluímos que $m_1 = 0$. Desta forma, $(R(M,M))^m = 0$.

Suponha que a hipótese é verificada para $k \leq s - 1$, com $s \geq 2$, e sejam $m_1, \cdots, m_s \in (R(M,M))^m$ tais que $(R(M,M))^m = m_1 A + \cdots + m_s A$. Com o mesmo raciocínio utilizado anteriormente, concluímos que existem $x_1, \cdots, x_s$ pertencentes a $R(M,M)$ tais que $m_1 = m_1 x_1 + \cdots + m_s x_s$. Daí, $m_1(1 - x_1) = m_2 x_2 + \cdots + m_s x_s$. Novamente como $x_1 \in R(M,M)$, $1 - x_1$ é invertível, donde m_1 pertence a $m_2 A + \cdots + m_s A$. Disto $(R(M,M))^m = m_2 A + \cdots + m_s A$. Pela hipótese de indução, $m_2 A + \cdots + m_s A = 0$, donde $(R(M,M))^m = 0$. Portanto $R(M,M)$ é nilpotente, sendo então seus elementos nilpotentes.

b) Temos que os morfismos não invertíveis de $End_A(M)$ estão em $R(M,M)$. Disto, se tomamos $\bar{f}$, $\bar{g}$ em $End_A(M)/R(M,M)$, com $\bar{f} \neq \bar{0}$ e $\bar{g} \neq \bar{0}$, então $\overline{gf} = \bar{g}\bar{f} \neq \bar{0}$, pois se fosse $\bar{f}\bar{g} = \bar{0}$, então $\overline{g^{-1}}\bar{g}\bar{f} = \overline{g^{-1}}\bar{0}$, e portanto $\bar{f} = \bar{0}$, uma contradição. Desta forma, $End_A(M)/R(M,M)$ é um anel com divisão.

Daí, como $End_A(M)$ é de dimensão finita, então $End_A(M)/R(M,M)$ é de dimensão finita, donde, dado $\varphi \in End_A(M)/R(M,M)$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que o conjunto $\{1, \cdots, \varphi^n\}$ é linearmente dependente em $End_A(M)/R(M,M)$, isto é, existem $\lambda_0, \cdots, \lambda_n \in k$ não todos nulos tais que

$$\lambda_0 1 + \lambda_1 \varphi + \cdots + \lambda_n \varphi^n = 0.$$

Disto, o polinômio $p(x) = \lambda_0 + \lambda_1 x + \cdots + \lambda_n x^n$ é tal que $p(\varphi) = 0$. Podemos ter $p(x)$ irredutível ou não. Suponha $p(x)$ não irredutível. Então existem $f(x)$, $g(x) \in k[x]$ tais que $p(x) = f(x)g(x)$. Assim, $p(\varphi) = f(\varphi)g(\varphi) = 0$. Como $f(\varphi)$ e $g(\varphi)$ pertencem a $End_A(M)/R(M,M)$, que é anel com divisão, $f(\varphi) = 0$, ou $g(\varphi) = 0$. Suponha que $f(\varphi) = 0$. Seguindo com esse raciocínio, chegamos a um polinômio $q(x)$ em $k[x]$ irredutível tal que $q(\varphi) = 0$. Sendo k algebricamente fechado, podemos tomar $q(x)$ como $q(x) = x - \lambda_\varphi$, para algum $\lambda_\varphi \in k^*$. Assim, $\varphi = \lambda_\varphi$. Como isso vale para todo

$\varphi \in End_A(M)/R(M,M)$, segue que $End_A(M)/R(M,M) \simeq k$ $\square$

Sejam X e Y A-módulos indecomponíveis não isomorfos, com A k-álgebra e k um corpo algebricamente fechado. Neste caso, pelos resultados anteriores $End_A(X)$ e $End_A(Y)$ são locais, então por ([2], A3.5), $R(X,Y)$, é o conjunto dos morfismos entre X e Y não invertíveis. Observe que neste caso $R(X,Y)$ coincide com o conjunto dos morfismos que não são epimorfismo que cinde nem são monomorfismo que cinde. De fato, se um morfismo não é nem monomorfismo que cinde nem epimorfismo que cinde, não é invertível, não estando assim no radical. E se o morfismo fosse um monomorfismo que cinde, então X seria somando de Y, o que não ocorre. O mesmo vale se o morfismo fosse ujm epimorfismo que cinde. disto tem-sea igualdade.

1.3 Aljava

Definição 1.8. *Uma* **aljava** $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ *é uma quádrupla em que* Q_0 *é um conjunto cujos elementos são chamados* **vértices** *ou pontos,* Q_1 *é um conjunto cujos elementos são chamados* **flechas**, *e* s *e* t *são duas aplicações de* Q_1 *em* Q_0, *que associam a cada flecha* $\alpha \in Q_1$ *seu* **início** $s(\alpha) \in Q_0$ *e seu* **fim** $t(\alpha) \in Q_0$.

Denotamos $\alpha \in Q_1$, de início $s(\alpha) = a$ e fim $t(\alpha) = b$ por $\alpha : a \to b$ ou por $a \xrightarrow{\alpha} b$.

A aljava Q é **finita** se Q_0 e Q_1 são finitos. Diremos que a aljava Q tem **flechas múltiplas** se existirem em Q_1 flechas de mesmo início e mesmo fim.

Exemplo 1.2. *Seja* Q *aljava com* $Q_0 = \{a, b, c\}$ *e* $Q_1 = \{ a \xrightarrow{\alpha} b \ , \ b \xrightarrow{\beta} c \ , \ a \xrightarrow{\gamma} c \ \}$. *Podemos então representar* Q *através do seguinte diagrama:*

$$\begin{tikzcd} & b \arrow[dr, "\beta"] & \\ a \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[rr, "\gamma"'] & & c \end{tikzcd}$$

Uma **subaljava** de uma aljava Q é uma aljava $Q' = (Q'_0, Q'_1, s', t')$ tal que $Q'_0 \subseteq Q_0$, $Q'_1 \subseteq Q_1$, $s' = s\mid_{Q'_1}$ e $t' = t\mid_{Q'_1}$. A subaljava será **plena** se, dados dois vértices a, b em Q'_0, se existe flecha $\alpha : a \to b$ em Q_1, então $\alpha \in Q'_1$, isto é, Q'_1 é igual ao conjunto de todas as flechas em Q_1 com início e fim em Q'_0.

Dada uma aljava Q e a, $b \in Q_0$, um **caminho** u de comprimento $l \geq 0$ com início a e fim b, ou de a para b, em Q é uma sequência

$$a = a_0 \xrightarrow{\alpha_1} a_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow a_{l-1} \xrightarrow{\alpha_l} a_l = b$$

em que $\{a_i \mid 0 \leq i \leq l\} \subseteq Q_0$, $\{\alpha_i \mid 1 \leq i \leq l\} \subseteq Q_1$. Denotaremos o caminho u por

$$u = \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_l.$$

Diremos neste caso que o início do caminho é a e o fim do caminho é b. A cada $a \in Q_0$ associamos um caminho de comprimento $l = 0$ chamado de **caminho estacionário** ou **trivial**, e denotado por e_a. Dois caminhos são ditos **paralelos** se o início e o fim desses caminhos coincidirem.

Exemplo 1.3. *Na aljava do Exemplo 1.2*

$$\begin{tikzcd} & b \arrow[dr, "\beta"] & \\ a \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[rr, "\gamma"'] & & c \end{tikzcd}$$

temos por exemplo o caminho $\alpha\beta$ de a para c.

Usaremos a notação $x \rightsquigarrow y$ para indicar que existe um caminho de x para y.

Um **ciclo** é um caminho da forma

$$a = a_0 \xrightarrow{\alpha_1} a_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow a_{l-1} \xrightarrow{\alpha_l} a_l = a$$

isto é, é um caminho de a para a. Um **laço** é um ciclo de comprimento 1.

A cada flecha $\alpha : a \to b$ associamos uma inversa formal $\alpha^{-1} : b \to a$ de início $s(\alpha^{-1}) = b$ e fim $t(\alpha^{-1}) = a$. Um **passeio** de comprimento $l \geq 0$ de a para b (ou entre a e b) em Q é uma sequência

$$a = a_0 \xrightarrow{\alpha_1^{m_1}} a_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow a_{l-1} \xrightarrow{\alpha_l^{m_l}} a_l = b$$

com $m_i \in \{-1, 1\}$, para todo $1 \leq i \leq l$ (e $\alpha^1 = \alpha$).

Exemplo 1.4. *Novamente na aljava do Exemplo 1.2*

$$\begin{tikzcd} & b \arrow[dr, "\beta"] & \\ a \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[rr, "\gamma"'] & & c \end{tikzcd}$$

temos que $\beta^{-1}\alpha^{-1}$ é um exemplo de passeio de c para a.

Usaremos a notação $x \rightsquigarrow y$ para indicar que existe um passeio de x para y.

Um **ciclo não orientado** é uma passeio da forma

$$a = a_0 \xrightarrow{\alpha_1^{m_1}} a_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow a_{l-1} \xrightarrow{\alpha_l^{m_l}} a_l = a \ .$$

A aljava será dita **conexa** se, dados $x, y \in Q_0$, existe um passeio entre x e y.

Um elemento $b \in Q_0$ é um **sucessor** de $a \in Q_0$ se existe caminho de a para b. Ele será um sucessor direto se existe flecha de a para b. Um elemento $b \in Q_0$ será um **antecessor** de a se existe um caminho de b para a. Ele será um antecessor direto se existe flecha de b para a. Denotamos por a^- o conjunto de antecessores diretos de a e por a^+ o conjunto de sucessores diretos de a. O vértice a será uma **fonte** se $a^- = \emptyset$, e será um **poço** se $a^+ = \emptyset$.

Dados dois caminhos u e v de Q, se $s(v) = t(u)$, então a **concatenação** uv de u e de v é o caminho de Q definido como segue:

a) se u (resp. v) é trivial, então $uv = v$ (resp. $uv = u$).

b) se $u = \alpha_1 \cdots \alpha_n$ e $v = \beta_1 \cdots \beta_m$ $(\alpha_i, \beta_i \in Q_1)$, então $uv = \alpha_1 \cdots \alpha_n \beta_1 \cdots \beta_m$.

Definição 1.9. *Sejam Q uma aljava e k um corpo. A* **álgebra de caminhos** *kQ de Q é a k-álgebra cujo k-espaço vetorial subjacente tem como base a família de caminhos de Q e cujo produto uv entre dois caminhos é a concatenação desses caminhos, quando esta é definida, e zero do contrário.*

Se Q é uma aljava finita, o conjunto $\{e_a \mid a \in Q_0\}$ é um conjunto completo de idempotentes ortogonais primitivos.

Exemplo 1.5. *Seja Q a aljava*

$$1 \xleftarrow{\ \alpha\ } 2$$

A álgebra de caminhos kQ tem como base $\{e_1, e_2, \alpha\}$. A multiplicação ficará da seguinte forma:

	e_1	e_2	α
e_1	e_1	0	0
e_2	0	e_2	α
α	α	0	0

Neste caso kQ é isomorfo à algebra das matrizes 2×2 triangulares inferiores

$$\mathbb{T}_2(k) = \begin{bmatrix} k & 0 \\ k & k \end{bmatrix}$$

com o isomorfismo induzido pela aplicação k-linear dada por

$$e_1 \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \; e_2 \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \; \alpha \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Definição 1.10. *Seja Q uma aljava finita e conexa. O ideal bilateral da álgebra de caminhos kQ gerado (como ideal) pelas flechas de Q é chamado* **ideal flecha** *de kQ, sendo denotado por R_Q. Já R_Q^l será o ideal de kQ gerado pelo conjunto de caminhos de comprimento $\geq l$.*

Suponha k um corpo algebricamente fechado. Quando Q é sem ciclos, $R_Q = rad\, kQ$. Mas em geral, se Q tem ciclos, não é verdade que $rad\, kQ = R_Q$. Para ver isso, analisemos a álgebra dada pela aljava

$$1 \circlearrowright \alpha$$

Então $kQ \simeq k[t]$. Os ideais maximais de $k[t]$ são gerados por elementos da forma $t - \lambda$, com $\lambda \in k$. Como k é algebricamente fechado, e portanto infinito, existem infinitos ideais maximais, e a interseção entre esses ideais é nula, donde $rad\, kQ = 0$. Mas $R_Q = \bigoplus\limits_{l>0} k\alpha^l$, sendo portanto não nulo.

Definição 1.11. *Seja Q uma aljava finita. Um ideal I de kQ é dito um* **ideal admissível** *se existe um $m \geq 2$ tal que*

$$R_Q^m \subseteq I \subseteq R_Q^2.$$

Tomando I um ideal admissível de kQ, a álgebra dada pelo quociente kQ/I é chamada **álgebra com relação**, e o par (Q, I) é chamado **aljava com relação**.

Definição 1.12. *Seja Q uma aljava. Uma* **relação** *em Q com coeficientes em k é uma combinação k-linear (não nula) de caminhos de comprimento ao menos 2 de Q que têm mesmo início e mesmo fim.*

O **suporte** de uma relação é o conjunto de caminhos de Q que têm coeficiente não nulo na relação.

Definição 1.13. *Dada uma aljava Q, uma relação r em kQ é dita uma* **relação minimal** *se, quando temos $r = r_1 + r_2$, com r_1 e r_2 relações com suporte disjunto, então $r = r_1$ ou $r = r_2$.*

Teorema 1.3. *(ver [2], II 2.9) Sejam Q uma aljava finita, e I um ideal admissível de kQ. Então existe um conjunto finito de relações minimais $\{r_1, \cdots, r_m\}$ tal que $I = \langle r_1, \cdots, r_n \rangle$.*

1.4 A aljava de uma k-álgebra de dimensão finita

Definição 1.14. *Seja k um corpo. Seja A uma k-álgebra conexa, básica e de dimensão finita e $\{e_1, \cdots, e_n\}$ um conjunto completo de idempotentes ortogonais primitivos de A. A* **aljava (ordinária)** *de A, denotada por Q_A, é definida por:*

1. *Os elementos de $(Q_A)_0$ estão em correspondência bijetiva com os idempotentes $e_1, \cdots, e_n$.*
2. *Dados dois pontos a, b em $(Q_A)_0$, as flechas $\alpha : a \to b$ estão em correspondência bijetiva com os vetores numa base do espaço vetorial $e_a(rad\, A/rad^2 A)e_b$.*

Teorema 1.4. *(ver [2], II 3.6) Seja Q uma aljava finita e conexa, I um ideal admissível de kQ, e $A = kQ/I$. Então $Q_A = Q$.*

Teorema 1.5. *(ver [2], II 3.7) Seja A uma k-álgebra conexa, básica e de dimensão finita. Existe um ideal admissível I de Q_A tal que $A = kQ/I$.*

1.5 Representação de uma álgebra

Definição 1.15. *Seja Q uma aljava finita. Uma* **representação k-linear** *(ou* **representação** *), M de Q é definida da seguinte forma (com k sendo um corpo):*

1. *A cada ponto $a \in Q_0$, é associado um k-espaço vetorial M_a.*
2. *A cada flecha $\alpha : a \to b$ em Q_1 é associada uma transformação k-linear $\varphi_\alpha : M_a \to M_b$.*

Denotamos esta representação por $M = (M_a, \varphi_\alpha)_{a \in Q_0,\ \alpha \in Q_1}$, ou $M = (M_a, \varphi_\alpha)$. A representação é de **dimensão finita** se cada espaço vetorial M_a é de dimensão finita.

Dadas duas representações $M = (M_a, \varphi_\alpha)$ e $N = (N_a, \psi_\alpha)$ de Q, um **morfismo** $f : M \to N$ é uma família $f = (f_a)_{a \in Q_0}$ de aplicações k-lineares $f_a : M_a \to N_a$ tal que, para cada flecha $\alpha : a \to b$, $\psi_\alpha f_a = f_b \varphi_\alpha$.

Definição 1.16. *Dada uma aljava Q, a categoria $Rep(Q)$ tem por objetos as representações de Q e por morfismos os morfismos acima definidos. Dados dois morfismos $f : M \to N$, $g : N \to L$, com M, N e L representações de Q, a composição $gf : M \to L$ é dada pela composição das aplicações k-lineares $g_a f_a$, para cada $a \in Q_0$.*

A subcategoria plena de $\text{Rep}_k\,(Q)$ consistindo das representações de dimensão finita é denotada por $\text{rep}_k\,(Q)$.

Definição 1.17. *Dados Q uma aljava e I um ideal admissível de kQ, dizemos que uma representação $M = (M_a, \varphi_\alpha)$ é* **limitada por** *I se para uma relação $r \in I$ temos $\varphi_r = 0$.*

Denotaremos por $Rep(Q,I)$ (ou $rep(Q,I)$) a subcategoria plena de $Rep(Q)$ (ou $rep(Q)$) consistindo das representações de Q limitadas por I.

Dada uma k-álgebra $A = kQ/I$, temos o seguinte resultado relacionando a categoria de módulos de A e a categoria de representações de Q:

Teorema 1.6. *(ver [2], III 1.6) Sejam $A = kQ/I$, com Q aljava finita e conexa e I um ideal admissível de kQ. Existe uma equivalência k-linear de categorias*

$$F : Mod\ A \to Rep_k\,(Q,I)$$

que pode ser restringida a uma equivalência de categorias $F : mod\ A \to rep_k\,(Q,I)$.

Daremos agora uma descrição de como é a representação de um A-módulo simples, indecomponível, projetivo e injetivo, para uma k-álgebra de dimensão finita e básica, com k algebricamente fechado.

Dada uma aljava finita Q, tal que $A = kQ/I$, e $a \in Q_0$, denotamos por $S(a)$ a representação de Q dada por:

$$S(a)_b = \begin{cases} 0 & \text{se } b \neq a \\ k & \text{se } b = a \end{cases}$$

O conjunto $\{S(a) \mid a \in Q_0\}$ é um conjunto completo de representantes das classes de A-módulos simples.

Teorema 1.7. *(ver [2], III 2.2) Seja $M = (M_a, \varphi_\alpha)$ uma representação de (Q,I).*

a) M é semissimples se, e somente se, $\varphi_\alpha = 0$, para cada $\alpha \in Q_1$.

b) $soc\ M = N$, com $N = (N_a, \psi_\alpha)$, sendo $N_a = M_a$ se a é um poço, enquanto

$$N_a = \bigcap_{\alpha: a \to b} Ker\ (\varphi_\alpha : M_a \to M_b)$$

se a não é poço, e $\psi_\alpha = \varphi_\alpha \mid N_a = 0$, para cada α de início a.

c) *rad* $M = J$, *com* $J = (J_a, \mu_\alpha)$, *sendo* $J_a = \sum_{\alpha:b\to a} Im\ (\varphi_\alpha : M_b \to M_a)$,*e* $\mu_\alpha = \varphi_\alpha|_{J_a}$ *para cada flecha* α *de início* a.

d) *top* $M = L$, *com* $L = (L_a, \psi_\alpha)$, *sendo* $L_a = M_a$ *se* a *é uma fonte, enquanto que* $L_a = \sum_{\alpha:b\to a} Coker(\varphi_\alpha : M_b \to M_a)$ *se* a *não é fonte e* $\varphi_\alpha = 0$, *para toda flecha* α *de início* a.

Teorema 1.8. *(ver [2], III 2.4) Sejam* (Q, I) *uma aljava limitada,* $A = kQ/I$ *e* $P(a) = e_a A$, *com* $a \in Q_0$ *um projetivo indecomponível de* kQ/I.

a) *Se* $P(a) = (P(a)_b, \varphi_\alpha)$, *então* $P(a)_b$ *é o* k*-espaço vetorial com base o conjunto das classes* $\bar{w}$ *em* $k(Q)/I$, *com* w *um caminho de* a *para* b, *e, para cada flecha* $\beta : b \to c$, *a aplicação* k*-linear* $\varphi : P(a)_b \to P(a)_c$ *é dada pela multiplicação à direita por* $\bar{\beta}$ *em* $k(Q)/I$.

b) *Seja rad* $P(a) = (P'(a), \varphi'_\beta)$, *então* $P'(a)_b = P(a)_b$, *se* $b \neq a$, *enquanto que* $P'(a)_a$ *é o* k*-espaço vetorial com base o conjunto das classes* $\bar{w}$ *de caminhos não estacionários de* a *para* a, *e* $\varphi'_\beta = \varphi_\beta$, *para toda flecha* $\beta \in Q_0$ *com início* $b \neq a$, *enquanto que* $\varphi'_\alpha = \varphi_\alpha|_{P'(a)}$, *para toda flecha* α *em* Q_0 *com início* a.

Teorema 1.9. *(ver [2], III 2.6) Sejam* (Q, I) *uma aljava limitada,* $A = kQ/I$, *e* $I(a) = D(Ae_a)$, *com* $a \in Q_0$ *um injetivo indecomponível de* kQ/I.

a) *Dado* $a \in Q_0$, *o módulo simples* $S(a)$ *é o socle de* $I(a)$.

b) *Se* $I(a) = (I(a)_b, \varphi)$, *então* $I(a)_b$ *é o dual do* k*-espaço vetorial com base o conjunto das classes* $\bar{w}$ *em* $k(Q)/I$, *com* w *um caminho de* b *para* a, *e, para cada flecha* $\beta : b \to c$, *a aplicação* k*-linear* $\varphi : I(a)_b \to I(a)_c$ *é dada pelo dual da multiplicação à esquerda por* $\bar{\beta}$ *em* $k(Q)/I$.

c) *Seja* $I(a)/S(a) = (L_b, \psi_\beta)$. *Então* L_b *é o espaço quociente gerado pelas classes de caminhos de* b *para* a *de comprimento ao menos 1, e* ψ_β *é a aplicação induzida por* φ_β.

1.6 Aljava com translação

Na definição original de aljava com translação (ver [3]), tomamos uma aljava sem flechas múltiplas. Como usaremos uma generalização do conceito de recobrimento, consideraremos aqui a definição usada por Chaio - Le Meur - Trepode em [10].

Definição 1.18. *Uma* **aljava com translação** *é um par* (Γ, τ)*, onde* Γ *é uma aljava* **localmente finita***, isto é, para cada* $x \in \Gamma_0$*, existe apenas um número finito de flechas saindo de* x *ou chegando em* x*, e* τ *é uma bijeção de um subconjunto de* Γ_0 *em um subconjunto de* Γ_0*, tal que as seguintes condições são satisfeitas:*

1. Γ *não tem laços (mas pode ter flechas múltiplas);*

2. *Sempre que* τ *é definida em algum ponto* $x \in \Gamma_0$*, o conjunto* x^- *dos antecessores de* x *em* Γ_0 *coincide com o conjunto* $(\tau x)^+$ *de sucessores de* τx*, isto é, representando por* α_i *a flecha* $y_i \to x$*, associada a ela existirá uma flecha* $\sigma\alpha_i : \tau x \to y_i$*, donde a seguinte configuração fará parte da aljava com translação:*

$$\begin{tikzcd}
 & y_1 \arrow[dr, "\alpha_1"] & \\
\tau x \arrow[ur, "\sigma\alpha_1"] \arrow[dr, "\sigma\alpha_r"'] & \vdots & x \\
 & y_r \arrow[ur, "\alpha_r"'] &
\end{tikzcd}$$

Exemplo 1.6. *Podemos tomar* Γ *como sendo*

$$\begin{tikzcd}
 & 2 \arrow[dr] \arrow[rr, dashed, no head] & & 4 \arrow[dr] & \\
1 \arrow[ur] \arrow[rr, dashed, no head] & & 3 \arrow[ur] \arrow[rr, dashed, no head] & & 5
\end{tikzcd}$$

em que a linha tracejada entre dois vértices $x - - - - - - y$ *representa que* $\tau y = x$.

Escreveremos Γ ao invés de (Γ, τ). A bijeção τ será chamada de **translação** de (Γ, τ). Os vértices de Γ_0 onde τ não é definida são chamados **projetivos**, e os vértices em Γ_0 onde τ^{-1} não é definida são chamados **injetivos** . Para um vértice $x \in \Gamma_0$, sua imagem τx é chamada **transladado de** x.

A subaljava plena de Γ formada por um vértice não projetivo x, por seu transladado τx, e pelo conjunto $(\tau x)^+$ (que é igual ao conjunto x^-) é chamada de **malha** começando em τx e terminando em x.

Definição 1.19. *Para cada* $M \in ind\, A$*, chamaremos de* τ**-órbita de** M *ao conjunto*

$$\{\tau^n M \mid n \in Z\}$$

em que $Z \subseteq \mathbb{Z}$ é o conjunto dos números inteiros tais que $\tau^n M$ está definido. M será **estável** *se $Z = \mathbb{Z}$.*

1.7 Morfismos irredutíveis

Seja A uma álgebra de artin. Um morfismo $f : X \to Y$, com X e Y A-módulos é dito uma

1. **secção** se existe um morfismo $g : Y \to X$ tal que $gf = 1_X$.
2. **retração** se existe um morfismo $g : Y \to X$ tal que $fg = 1_Y$.

Definição 1.20. *Um morfismo de A-módulos $f : L \to M$ é dito* **minimal à esquerda** *se para todo $h : M \to M$ tal que $hf = f$, h é um automorfismo.*

Definição 1.21. *Um morfismo de A-módulos $f : L \to M$ é chamado* **quase cindido à esquerda** *se*

1. *f não é secção.*
2. *Para todo morfismo $u : L \to U$ que não é seção, existe um morfismo $u' : M \to U$ tal que $u'f = u$, isto é, existe u' fazendo o seguinte diagrama comutativo:*

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & M \arrow[dl, dashed, "u'"] \\ U & \end{tikzcd}$$

Se f for minimal à esquerda e quase cindido à esquerda, diremos que f é **minimal quase cindido à esquerda**.

Definição 1.22. *Um morfismo de A-módulos $f : M \to N$ é dito* **minimal à direita** *se para todo $h : M \to M$ tal que $fh = f$ é um automorfismo.*

Definição 1.23. *Um morfismo de A-módulos $f : M \to N$ é chamado* **quase cindido à direita** *se*

1. *f não é retração.*
2. *Para todo morfismo $u : U \to N$ que não é retração, existe um morfismo $u' : U \to M$ tal que $fu' = u$, isto é, existe u' fazendo o seguinte diagrama comutativo:*

$$\begin{tikzcd} & U \arrow[dl, dashed, "u'"'] \arrow[d, "u"] \\ M \arrow[r, "f"'] & N \end{tikzcd}$$

Se f for minimal à direita e quase cindido à direita, diremos que f é **minimal quase cindido à direita**.

Vale o seguinte:

Teorema 1.10. *(ver [2], IV 1.3)*

a) Se $f : X \to Y$ é um morfismo minimal quase cindido à esquerda, então X é indecomponível.

b) Se $f : X \to Y$ é um morfismo minimal quase cindido à direita, então Y é indecomponível.

Definição 1.24. *Um morfismo $f : X \to Y$ em $modA$ é dito* **irredutível** *se satisfaz as seguintes condições:*

1. *f não é secção nem retração.*

2. *Se $f = gh$, então ou g é retração ou h é secção.*

Uma observação importante é que um morfismo irredutível é ou um monomorfismo próprio ou um epimorfismo próprio. De fato, suponha que $f : X \to Y$ é um morfismo irredutível que não é um epimorfismo próprio. Seja $f = jp$ a decomposição de f por $p : X \to Im\ f$, que é a restrição de f a imagem da f, e $j : Im\ f \to Y$, que é a inclusão da imagem da f em Y. Como f não é epimorfismo, j não é retração, donde, pela definição de morfismo irredutível, p deve ser secção, e portanto f é monomorfismo próprio.

Enunciaremos a seguir as principais propriedades de um morfismo irredutível a serem usadas no decorrer do texto.

Teorema 1.11. *(ver[2], IV 1.6) Sejam X e Y A-módulos indecomponíveis em $modA$. Um morfismo $f : X \to Y$ é irredutível se, e somente se, $f \in R(X,Y) \setminus R^2(X,Y)$.*

Teorema 1.12. *(ver [2], IV 1.8)*

a) Se $f : L \to M$ é um monomorfismo irredutível, então $N = Coker\ f$ é um A-módulo indecomponível.

b) Se $g : M \to N$ é um epimorfismo irredutível, então $L = Ker\ g$ é um A-módulo indecomponível.

Teorema 1.13. *(ver [2], IV 1.10)*

a) *Seja* $f : L \to M$ *um morfismo minimal quase cindido à esquerda. Então* f *é irredutível. Mais ainda, um morfismo* $f' : L \to M'$ *é irredutível se, e somente se,* $M' \neq 0$ *e existem uma decomposição em soma direta* $M \simeq M' \oplus M''$ *e um morfismo* $f'' : L \to M''$ *tais que* $[f' \ f'']^t : L \to M' \oplus M''$ *é morfismo minimal quase cindido à esquerda.*

b) *Seja* $g : M \to N$ *um morfismo minimal quase cindido à direita. Então* g *é irredutível. Mais ainda, um morfismo* $g' : M' \to N$ *é irredutível se, e somente se,* $M' \neq 0$ *e existem uma decomposição em soma direta* $M \simeq M' \oplus M''$ *e um morfismo* $g'' : M'' \to N$ *tais que* $[g' \ g''] : M' \oplus M'' \to N$ *é morfismo minimal quase cindido à direita.*

1.8 Sequência quase cindida

Definição 1.25. *Uma sequência exata em* $mod\ A$

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

é dita **quase cindida** *se satisfaz:*

a) f *é morfismo minimal quase cindido à esquerda.*

b) g *é morfismo minimal quase cindido à direita.*

Neste caso, temos pelo Teorema(1.10) que L e N são A-módulos indecomponíveis. São caracterizações equivalentes para uma sequência quase cindida:

Teorema 1.14. *(ver [2], IV 1.13) Seja* $0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ *uma sequência exata curta em* $mod\ A$*. São equivalentes:*

a) *A sequência é quase cindida.*

b) L *é um* A*-módulo indecomponível e* g *é um morfismo quase cindido à direita.*

c) N *é um* A*-módulo indecomponível e* f *é um morfismo quase cindido à esquerda.*

d) *O morfismo* f *é minimal quase cindido à esquerda.*

e) *O morfismo* g *é minimal quase cindido à direita.*

f) L *e* M *são* A*-módulos indecomponíveis, e* f *e* g *são morfismos irredutíveis.*

Dada uma álgebra de Artin sobre k, existe uma dualidade $D : mod\ A \to mod\ A^{op}$ dada por $D = Hom_k(-, I_0(k/rad\ k))$, em que $I_0(k/rad\ k)$ é a envolvente injetiva de $k/rad\,k$. Quando em particular k é um corpo, $D = Hom_k(-,k)$.

Seja $\underline{mod}\,A$ a categoria cujos objetos são A-módulos finitamente gerados, e o conjunto de morfismos entre dois objetos M e N é

$$\underline{Hom}_A(M,N) = Hom_A(M,N)/P(M,N)$$

em que $P(M,N)$ é o subgrupo de $Hom_A(M,N)$ formado pelos morfismos $f : M \to N$ que se fatoram por um A-módulo projetivo, isto é, é o conjunto dos morfismos $f : M \to N$ tal que existem P um A-módulo projetivo e $g : M \to P$, $h : P \to N$ tais que $f = hg$.

De maneira similar, $\overline{mod}\,A$ é a categoria cujos objetos são os mesmos de $mod\,A$ e cujo conjunto de morfismos entre dois objetos M e N é

$$\overline{Hom}_A(M,N) = Hom_A(M,N)/I(M,N)$$

em que $I(M,N)$ é o subgrupo de $Hom_A(M,N)$ dos morfismos que se fatoram através de um A-módulo injetivo.

Considere o funtor exato à esquerda e contravariante

$$(-)^t = Hom_A(-,A) : mod A \to mod A^{op}.$$

Sendo P_A um A-módulo à direita projetivo, $P^t = Hom_A(P,A)$ é A-módulo à esquerda projetivo.

Tome agora, para cada A-módulo à direita M, sua resolução projetiva minimal

$$P_1 \xrightarrow{p_1} P_0 \xrightarrow{p_0} M \longrightarrow 0$$

que nada mais é que uma sequência exata tal que $p_0 : P_0 \to M$ e $p_1 : P_1 \to Ker\ p_0$ são coberturas projetivas. Aplicando o funtor $(-)^t$ à sequência acima, obtemos uma sequência de A-módulos à esquerda:

$$0 \longrightarrow M^t \xrightarrow{p_0^t} P_0^t \xrightarrow{p_1^t} P_1^t \longrightarrow Coker\, p_1^t \longrightarrow 0$$

Denotamos $Coker\, p_1^t$ por $Tr\ M$, e o chamamos de **transposta** de M.

Tal funtor induz um funtor

$$Tr : \underline{mod} A \to \underline{mod} A^{op}.$$

A dualidade $D : mod\, A^{op} \to mod\, A$ induz uma dualidade $D : \underline{mod}\, A^{op} \to \overline{mod}\, A$.

Definição 1.26. *As* **translações de Auslander-Reiten** *são definidas pela composição de D e Tr, sendo*

$$\tau = DTr \quad e \quad \tau^{-1} = TrD.$$

Para M um A-módulo indecomponível, τM é chamado de **transladado** *de M.*

O teorema seguinte traz algumas das propriedades satisfeitas pelas translações de Auslander-Reiten.

Teorema 1.15. *(ver [2],IV 2.10) Sejam M e N A-módulos indecomponíveis em $mod\ A$.*

a) O A-módulo τM é o módulo $\{0\}$ se, e somente se, M é A-módulo projetivo.

a') O A-módulo $\tau^{-1}M$ é o módulo $\{0\}$ se, e somente se, M é A-módulo injetivo.

b) Se M é um módulo não projetivo, então τM é um módulo indecomponível não injetivo e $\tau^{-1}\tau M \simeq M$.

b') Se M é um módulo não injetivo, então $\tau^{-1}M$ é um módulo indecomponível não projetivo e $\tau\tau^{-1}M \simeq M$.

c) Se M e N são módulos não projetivos, então $M \simeq N$ se, e somente se, $\tau M \simeq \tau N$.

c') Se M e N são módulos não injetivos, então $M \simeq N$ se, e somente se, $\tau^{-1}M \simeq \tau^{-1}N$.

Sobre a existência de sequências quase cindidas, temos um importante resultado:

Teorema 1.16. *(ver [2], IV 3.1)*

a) Para cada A-módulo não projetivo indecomponível M, existe uma sequência quase cindida

$$0 \to \tau M \to E \to M \to 0$$

em $mod\ A$.

b) Para cada A-módulo não injetivo indecomponível M, existe uma sequência quase cindida

$$0 \to M \to E \to \tau^{-1}M \to 0$$

em $mod\ A$.

Outras propriedades envolvendo morfismos irredutíveis que serão importantes nos próximos capítulos são as seguintes:

Teorema 1.17. *(ver[2], IV 3.5)*

a) Seja P um módulo projetivo indecomponível em $modA$. Um morfismo $g : M \to P$ é minimal quase cindido à direita se, e somente se, g é monomorfismo com imagem igual a rad P.

b) Seja I um módulo injetivo indecomponível em $modA$. Um morfismo $f : I \to M$ é minimal quase cindido à esquerda se, e somente se, é um epimorfismo com núcleo igual a soc I.

Teorema 1.18. *(ver [2], IV 3.9)*

a) Seja S um A-módulo simples projetivo que não é injetivo. Se $f : S \to M$ é irredutível, então M é projetivo.

b) Seja S um A-módulo simples injetivo que não é projetivo. Se $f : M \to S$ é irredutível, então M é injetivo.

Teorema 1.19. *(ver [2], IV 3.8)*

a) Seja M um módulo indecomponível não projetivo em $modA$. Existe um morfismo irredutível $f : X \to M$ se, e somente se, existe um morfismo irredutível $f' : \tau M \to X$.

b) Seja M um módulo indecomponível não injetivo em $modA$. Existe um morfismo irredutível $f : M \to X$ se, e somente se, existe um morfismo irredutível $f' : X \to \tau^{-1}M$.

Teorema 1.20. *(ver [2], IV 3.11) Seja P um A-módulo projetivo-injetivo não simples, com $S = soc\, P$ e $R = rad\, P$. Então a sequência*

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{[q\ i]^t} R/S \oplus P \xrightarrow{[-j\ p]} P/S \longrightarrow 0$$

é quase cindida, sendo i e j inclusões e p e q projeções.

O próximo teorema sera utilizado com frequência ao longo do texto para dar uma condição que garanta a existência de caminho de morfismos irredutíveis entre módulos indecomponíveis. Ele pode ser encontrado em [3]. Daremos aqui a sua demonstração.

Teorema 1.21. *Sejam X e Y módulos indecomponíveis em mod A, com A uma álgebra de artin, e $f \in R^n(X,Y)$, com $n \geq 2$. Temos:*
a) Existe um número natural $s \geq 1$, $M_1, \cdots, M_s$ módulos indecomponíveis e morfismos $h_i \in R(X, M_i)$, $g_i : M_i \to Y$, com cada g_i soma de compostas de $n-1$ morfismos irredutíveis entre módulos indecomponíveis tal que $f = \sum_{i=1}^{s} g_i h_i$.

b) Se $f \in R^n(X,Y) \setminus R^{n+1}(X,Y)$, então ao menos uma das h_i em (a) é irredutível e $f = u + v$, em que u é uma soma não nula de composta de morfismos irredutíveis entre módulos indecomponíveis e $v \in R^{n+1}(X,Y)$.

a') Existe um número natural $t \geq 1$, $M_1, \cdots, M_s$ módulos indecomponíveis e morfismos $g_i \in R(M_i, Y)$, $h_i : X \to M_i$, com cada h_i soma de compostas de $n-1$ morfismos irredutíveis entre módulos indecomponíveis tal que $f = \sum_{i-1}^{t} g_i h_i$.

b') Se $f \in R^n(X,Y) \setminus R^{n+1}(X,Y)$, então ao menos uma das g_i em (a') é irredutível.

Demonstração: Demonstraremos apenas as afirmações (a) e (b), com (a') e (b') sendo feitas de maneira análoga.

a) Mostremos tal afirmação por indução em n. Para $n = 2$, seja f pertencente a $R^2(X,Y)$. Tome $g : M \to Y$ morfismo minimal quase cindido à direita. Podemos decompor $M = \bigoplus_{i=1}^{s} M_i$. Então $g = [g_1 \cdots g_s]$, com $g_i : M_i \to Y$. E como $f \in R^2(X,Y) \subseteq R(X,Y)$, f não é epimorfismo que cinde, donde existe $h : X \to M$, com $gh = f$. Também do fato de $f \in R^2(X,Y)$, e como $g \in R(M,Y) \setminus R^2(M,Y)$, temos que $h = [h_1 \cdots h_s]^t \in R(X,M)$, ou seja, $h_i : X \to M_i \in R(X, M_i)$, para todo i. Disto $f = \sum_{i=1}^{s} g_i h_i$, com g_i irredutível entre módulos indecomponíveis e $h_i \in R(X, M_i)$.

Suponha agora que o resultado é válido para n, e seja $f : X \to Y \in R^{n+1}(X,Y)$. Então $f = qr$, com $r : X \to W \in R(X,W)$ e $q : W \to Y \in R^n(W,Y)$. Escrevendo $W = \bigoplus_{i=1}^{s} W_i$, para algum s, teremos $q = [q_i \cdots q_s]$, $r = [r_1 \cdots r_s]^t$ e portanto $f = \sum_{i=1}^{s} q_i r_i$. Como $q_i \in R^n(W_i, Y)$, temos pela hipótese de indução que $q_i = \sum_{j=1}^{v_i} l_{i_j} m_{i_j}$, com l_{i_j} soma de composta de $n-1$ morfismos irredutíveis, e $m_{i_j} \in R(W_i, C_{i_j})$, com C_{i_j} módulo indecomponível. Como $m_{i_j} r_i \in R^2(X, C_{i_j})$, temos por indução que $m_{i_j} r_i = \sum u'_{i_{jp}} u_{i_{jp}}$, com $u'_{i_{jp}}$ morfismo irredutível. Disto $l_{i_j} u'_{i_{jp}}$ é soma de composta de n morfismos irredutíveis, e como $u_{i_{jp}} \in R(X, M_{i_{jp}})$, para algum p, e o resultado segue.

b) Como $f = \sum l_{i_j} u'_{i_{jp}} u_{i_{jp}} \in R^n(X,Y) \setminus R^{n+1}(X,Y)$, e $u_{i_{jp}} \in R(X, M_{i_{jp}})$, então para algum p, $u_{i_{jp}}$ não deve pertencer a $R^2(X, M_{i_{jp}})$, isto é, para algum p, $u_{i_{jp}}$ deve ser irredutível, uma vez que $l_{i_j} u'_{i_{jp}} \in R^n(X,Y)$, e portanto o resultado segue. □

1.9 Aljava de Auslander-Reiten

Seja A uma álgebra de artin. Denotemos por $ind\,A$ a subcategoria plena de $mod\,A$ cuja família de objetos consiste de um conjunto completo de A-módulos indecomponíveis não isomorfos.

Dados M, N A-módulos indecomponíveis, pelo Teorema (1.11) temos que um morfismo $f : M \to N$ é irredutível se, e somente se, $f \in R(M,N) \setminus R^2(M,N)$. Disto, denotaremos por

$$Irr(M,N) = R(M,N)/R^2(M,N).$$

Temos que $Irr(M,N)$ é um $End_A(N)/R(N,N) - (End_A(M)/R(M,M))^{op}$ bimódulo. No caso particular em que M e N são indecomponíveis, a demonstração dada no Teorema (1.2) pode ser usada para concluir que $End_A(M)/R(M,M)$ e $End_A(N)/R(N,N)$ são anéis com divisão, e $Irr(M,N)$ é $End_A(N)/R(N,N) - (End_A(M)/R(M,M))^{op}$-espaço vetorial.

Tomando M e N A-módulos indecomponíveis, e $f_i \in Hom_A(M,N)$, denotamos por $M^n \xrightarrow{[f_1\,\cdots\,f_n]} N$ o morfismo dado por $[f_1 \ \cdots \ f_n](m_1, \ \cdots, \ m_n)^t = \sum_{i=1}^{n} f_i m_i$ e $M \xrightarrow{[f_1\,\cdots\,f_n]^t} N^n$ o morfismo dado por $[f_1 \ \cdots \ f_n]^t(m) = (f_1(m), \ \cdots, \ f_n(m))^t$.

Definição 1.27. *Dados M, N A-módulos, diremos que dois morfismos f, g em $Hom_A(M,N)$ são* **linearmente independentes módulo** *$R^n(M,N)$ se suas classes $\bar{f}$ e $\bar{g}$ em $Hom_A(M,N)/R^n(M,N)$ são linearmente independentes módulo $R^n(M,N)$.*

Valem os seguintes resultados:

Teorema 1.22. *(ver [3], VII 1.1) Sejam M e N A-módulos indecomponíveis não isomorfos, e $f_1, \ \cdots, \ f_n \in R(M,N)$.*

a) Se o morfismo $M^n \xrightarrow{[f_1\,\cdots\,f_n]} N$ é irredutível, então $\{f_1, \ \cdots, \ f_n\}$ é um conjunto linearmente independente no $(End_A(M)/R(M,M))^{op}$-espaço vetorial $R(M,N)/R^2(M,N)$.

b) Se o morfismo $M \xrightarrow{[f_1\,\cdots\,f_n]^t} N^n$ é irredutível, então $\{f_1, \ \cdots, \ f_n\}$ é um conjunto linearmente independente no $End_A(N)/R(N,N)$-espaço vetorial $R(M,N)/R^2(M,N)$.

Assim, tomando um morfismo minimal quase cindido à direita terminando em N $g : X \to N$, e sendo $X = X' \oplus M^n$ e $M^n \xrightarrow{[g_1\,\cdots\,g_n]} N$ a decomposição de g restrita aos seus somandos isomorfos a M, bem como $h : M \to Y$ um morfismo minimal quase cindido à esquerda começando em M, Y igual a $Y' \oplus N^n$ e $M \xrightarrow{[h_1 \cdots h_n]^t} N^n$ a decomposição de h restrita aos somandos de Y isomorfos a N, temos que:

Teorema 1.23. *(ver [3], VII 1.2) Seguindo a notação dada acima, temos o seguinte.*

a) O conjunto $\{g_1, \cdots, g_n\}$ gera o $(End_A(M)/R(M,M))^{op}$ espaço vetorial Irr(M,N).

b) O conjunto $\{h_1, \cdots, h_n\}$ gera o $End_A(N)/R(N,N)$ espaço vetorial Irr(M,N).

Combinando esses dois resultados, temos:

Teorema 1.24. *(ver [3], VII 1.3) Sejam M e N A-módulos indecomponíveis, e assuma que existe um morfismo irredutível entre M e N.*

a) Sendo $f : X \to N$ um morfismo minimal quase cindido à direita, a multiplicidade de M como somando de X é igual à dimensão do $(End_A(M)/R(M,M))^{op}$ espaço vetorial Irr(M,N).

b) Sendo $g : M \to Y$ um morfismo minimal quase cindido à esquerda, a multiplicidade de N como somando de Y é igual à dimensão do $(End_A(N)/R(N,N))$ espaço vetorial Irr(M,N).

No caso em que k é um corpo algebricamente fechado, pelo teorema (1.2), concluímos que $(End_A(M)/R(M,M))^{op} \simeq k \simeq (End_A(N)/R(N,N))$, donde a dimensão de *Irr*(M,N) é igual para *Irr*(M,N) visto como $(End_A(M)/R(M,M))^{op}$-espaço vetorial ou visto como $(End_A(N)/R(N,N))$-espaço vetorial.

Definição 1.28. *A* **Aljava de Auslander-Reiten** $\Gamma(mod\, A)$ *é definida da seguinte forma:*

1. *O conjunto $\Gamma(mod\, A)_0$ é igual ao conjunto $(ind\, A)_0$ das classes de isomorfismos de A-módulos indecomponíveis.*

2. *Existe uma flecha $M \to N$ em $(\Gamma(mod\, A))_1$ se e somente se existe um morfismo irredutível $M \to N$ em mod A. A flecha tem valoração (a,b) se existe um morfismo minimal quase cindido à direita $M^a \oplus X \to N$, com M não sendo somando de X e um morfismo minimal quase cindido à esquerda $M \to N^b \oplus Y$, com N não sendo somando de Y.*

Observação: Se k é um corpo algebricemente fechado,a definição e A uma k-álgebra básica, conexa e de dimensão finita, a definição de $\Gamma(mod\, A)$ fica da seguinte forma:

1. Os vértices de $\Gamma(mod\, A)$ são os objetos de $ind\, A$.

2. Sejam M, N vértices em $(\Gamma(mod\, A))_0$. As flechas $M \to N$ estão em correspondência bijetiva com os vetores da base do k-espaço vetorial $Irr(M,N)$.

Podemos ver que $\Gamma(mod\, A)$ é uma aljava com translação, com a translação sendo dada por $\tau = DTr$. Primeiramente, $\Gamma(mod\ A)$ não tem laços. De fato, se existe um morfismo irredutível $f : X \to X$, com X um A-módulo indecomponível finitamente gerado, então ou f deve ser epimorfismo próprio ou f deve ser monomorfismo próprio. Sendo X um A-módulo finitamente gerado e A uma álgebra de artin, M é noetheriano e artiniano. Mas através do resultado:

Teorema 1.25. *(ver [1], VII 6.7) Seja X um A-módulo e $f \in End X$.*

1. *Se X é um noetheriano e f é um epimorfismo, então f é um automorfismo.*

2. *Se X é um artiniano e f é um monomorfismo, então f é um automorfismo.*

concluímos que não podem existir monomorfismos próprios ou epimorfismos próprios em $End X$.

E usando a translação $\tau = DTr$, temos que, a cada sequência quase cindida em $mod\, A$, que existe pelo Teorema (1.16),

$$0 \to \tau N \to \bigoplus_{i=1}^{t} M_i^{n_i} \to N \to 0$$

corresponde à seguinte **malha** em $\Gamma(mod A)$:

$$\begin{tikzcd}
& M_1 \arrow[dr, "\beta_{1n_1}"] & \\
\tau N \arrow[ur, "\alpha_{1n_1}"] \arrow[dr, "\alpha_{tn_t}"'] \arrow[rr, dashed, no head] & \vdots & N \\
& M_t \arrow[ur, "\beta_{tn_t}"'] &
\end{tikzcd}$$

E pela existência de tal sequência em $mod\, A$, como o termo do meio da sequência é composto por finitos módulos indecomponíveis, concluímos que a aljava é localmente finita. Portanto temos satisfeitas todas as condições para ser $\Gamma(mod\, A)$ uma aljava com translação.

E através da estrutura de $\Gamma(mod\ A)$ concluímos que, dado M um A-módulo indecomponível finitamente gerado, o conjunto M^- dos antecessores diretos de M coincide com o conjunto dos vértices L tal que L é somando de $rad\,(M)$, no caso em que M é projetivo, ou somando do termo do meio da sequência quase cindida terminando em M, se M não é projetivo. Similarmente, o conjunto N^+ dos sucessores diretos de N coincide com o conjunto dos vértices M tais que M é somando de $N/soc\,N$, no caso em que N é injetivo, ou somando do termo do meio da sequência quase cindida começando em N no caso em que N não é injetivo. Tais conjuntos são sempre finitos.

Vejamos agora um exemplo de aljava de Auslander-Reiten:

Exemplo 1.7. *Seja A a k-álgebra de caminhos dada pela aljava*

$$1 \to 2 \to 3$$

com k corpo algebricamente fechado. Comecemos listando os módulos projetivos e injetivos indecomponíveis.

$$P(1) = \ k \xrightarrow{1} k \xrightarrow{1} k \ = I(3)$$

$$P(2) = \ 0 \longrightarrow k \xrightarrow{1} k$$

$$P(3) = \ 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow k \ = S(3)$$

$$I(1) = \ k \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \ = S(1)$$

$$I(2) = \ k \xrightarrow{1} k \longrightarrow 0$$

Como $P(3)$ é um simples projetivo, pelo Teorema (1.18)*, todo morfismo irredutível começando em $P(3)$ tem como contradomínio um A-módulo projetivo. E como $P(3) = rad\,P(2)$, e $P(3)$ não é somando de $rad\,P(1)$, pelo Teorema* (1.17)*, o único morfismo irredutível começando em $P(3)$ é a inclusão $i : P(3) \to P(2)$. Disto temos uma sequência quase cindida*

$$0 \to P(3) \to P(2) \to Coker\,(i) = P(2)/P(3) = S(2) \to 0.$$

Além disso, $P(2) = rad\ P(1)$, a inclusão $P(2) \to P(1)$ é um morfismo irredutível. Além disso, sendo $P(1) = I(3)$, donde, pelo Teorema (1.20)*, existe uma sequência quase cindida*

$$0 \to P(2) \to P(1) \oplus S(2) \to I(2) \to 0.$$

Por outro lado, a projeção $I(2) \to I(2)/S(2) = I(1)$ é minimal quase cindida à esquerda, de núcleo $S(2)$, donde temos uma sequência quase cindida

$$0 \to S(2) \to I(2) \to I(1) \to 0.$$

Com essas informações, podemos construir a aljava de Auslander-Reiten $\Gamma(mod A)$

$$\begin{tikzcd}
P(3) \arrow[rr, dash, dashed] \arrow[dr] & & S(2) \arrow[rr, dash, dashed] \arrow[dr] & & I(1) \\
& P(2) \arrow[rr, dash, dashed] \arrow[ur] \arrow[dr] & & I(2) \arrow[ur] & \\
& & P(1) \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

Veremos agora a definição de caminho seccional, bem como a definição de ciclo seccional dada em [5], baseada em [4].

Definição 1.29. *Dada Γ uma aljava com translação, seja $p : x_0 \to x_1 \to \cdots \to x_n$ um caminho em Γ. Então p é um* **caminho seccional** *se $x_{i-1} \neq \tau x_{i+1}$, para todo $0 < i < n$. Se $x_0 = x_n$, isto é, se o caminho for um ciclo, então será um* **ciclo seccional** *se for um caminho seccional e se $\tau x_1 \neq x_{n-1}$.*

Em [4] encontramos o seguinte resultado:

Teorema 1.26. *Seja A uma álgebra do tipo de representação finita. Então $\Gamma(mod A)$ não contém ciclos seccionais.*

Exemplo 1.8. *Seja Γ a aljava*

$$\begin{tikzcd}
y \arrow[dr] & & & & \\
{} \arrow[r, dash, dashed] & x \arrow[rr, dash, dashed] \arrow[dr] & & \tau^{-1}x & \\
\tau^{-1}x \arrow[ur] \arrow[rr, dash, dashed] \arrow[dr] & & \tau^{-2}x \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[r, dash, dashed] & {} & \\
& \tau y \arrow[ur] \arrow[rr, dash, dashed] \arrow[dr] & & y & \\
\tau z \arrow[ur] \arrow[rr, dash, dashed] & & z \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

que é a aljava de Auslander-Reiten da álgebra de caminhos dada pela aljava

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[loop above, "\alpha"] \arrow[r, "\beta"] & 2 \end{tikzcd}$$

com a relação $\alpha^2 = 0$.

Tal aljava não contém ciclos seccionais. Mas note que o caminho

$$\tau y \to \tau^{-2}x \to \tau^{-1}x \to \tau y$$

embora seja um caminho seccional, não é um ciclo seccional, justamente porque $\tau(\tau^{-2}x) = \tau^{-1}x$.

Para finalizar essa seção daremos algumas classificações das componentes da aljava de Auslander-Reiten de A.

Definição 1.30. *Uma componente* Γ *de* $\Gamma(mod\,A)$ *é dita* **pós-projetiva** *se:*

1. *Todo vértice de* $(\Gamma)_0$ *está na* τ*-órbita de um projetivo.*

2. *Nenhum vértice de* $(\Gamma)_0$ *está em um ciclo orientado em* $\Gamma(mod\,A)$.

Definição 1.31. *Uma componente* Γ *de* $\Gamma(mod\,A)$ *é dita* **pré-injetiva** *se:*

1. *Todo vértice de* $(\Gamma)_0$ *está na* τ*-órbita de um injetivo.*

2. *Nenhum vértice de* $(\Gamma)_0$ *está em um ciclo orientado em* $\Gamma(mod\,A)$.

Definição 1.32. *Uma componente* Γ *de* $\Gamma(mod\,A)$ *é dita* **regular** *se não possui módulos projetivos ou injetivos.*

Definição 1.33. *Uma componente* Γ *de* $\Gamma(mod\,A)$ *é dita* **estândar generalizada** *se, para todo* $X, Y \in (\Gamma)_0$, $R^{\infty}(X,Y) = 0$.

Definição 1.34. *Uma componente* Γ *de* $\Gamma(mod\,A)$ *é dita* **convexa** *se, para todo caminho* $X_0 \to X_1 \to \cdots \to X_n$ *tal que* X_0 *e* X_n *estão em* $(\Gamma)_0$, *tem-se* $X_i \in (\Gamma_0)$, *para* $1 \le i \le n-1$.

Capítulo 2

Recobrimentos

O objetivo deste capítulo é estabelecer um recobrimento para uma aljava com translação que generaliza a definição de recobrimento universal dada por Bongartz - Gabriel em [6], além de apresentar algumas das propriedades satisfeitas por tal recobrimento.

2.1 Recobrimento de categorias

Definição 2.1. *Sejam $\mathscr{E}$, $\mathscr{B}$ k-categorias. Um* **funtor recobrimento** *é um funtor k-linear $F : \mathscr{E} \to \mathscr{B}$ verificando as seguintes propriedades:*

1. *$F^{-1}(x) \neq \emptyset$, para todo $x \in \mathscr{B}_0$;*
2. *para todo x_0,$y_0 \in \mathscr{B}_0$, e para todo $\hat{x}_0$, $\hat{y}_0 \in \mathscr{E}_0$ tal que $F(\hat{x}_0) = x_0$ e $F(\hat{y}_0) = y_0$, as seguintes aplicações induzidas por F são bijeções:*

$$\bigoplus_{\hat{y} \in F^{-1}(y_0)} Hom_{\mathscr{E}}(\hat{x}_0, \hat{y}) \longrightarrow Hom_{\mathscr{B}}(x_0, y_0)$$

$$\bigoplus_{\hat{x} \in F^{-1}(x_0)} Hom_{\mathscr{E}}(\hat{x}, \hat{y}_0) \longrightarrow Hom_{\mathscr{B}}(x_0, y_0)$$

Exemplo 2.1. *Seja Q a aljava:*

$$\begin{tikzcd} & 2 \arrow[dr, "c"] & \\ 1 \arrow[ur, "b"] \arrow[rr, "a"'] & & 3 \end{tikzcd}$$

e Q' a aljava:

$$\begin{tikzcd}
& 1' \arrow[r, "a_1"] \arrow[dl, "b_1"'] & 6' & \\
2' \arrow[dr, "c_1"'] & & & 5' \arrow[ul, "c_2"'] \\
& 3' & 4' \arrow[l, "a_2"] \arrow[ur, "b_2"'] &
\end{tikzcd}$$

Seja $\mathscr{E} = kQ'$ e $\mathscr{B} = kQ$. Temos que kQ visto como categoria é uma k-categoria. De fato, seu conjunto de objetos é o conjunto $\{e_1,\ e_2,\ e_3\}$ de caminhos triviais, e dados e_i e e_j objetos em kQ, como o conjunto dos morfismos de e_i para e_j é igual a $e_i kQ e_j$, ele é um espaço vetorial. O mesmo vale para kQ'.

Seja $F : \mathscr{E} \to \mathscr{B}$ dada por $F(x') = F((x+3)') = x$, para $x \in \{1,\ 2,\ 3\}$ e $x' \in Q'_0$, e:
- $F(a_1) = a$, $F(b_i) = b$ e $F(c_i) = c$, $1 \leq i \leq 2$;
- $F(a_2) = a + bc$.

Então F é funtor recobrimento. De fato, vejamos que as condições 1 e 2 da definição de recobrimento de k-categorias são satisfeitas:
1 - Temos que

$$F^{-1}(i) = \{i', (i+3)'\}$$

para $1 \leq i \leq 3$, donde $F^{-1}(x) \neq \emptyset$, para todo $x \in \mathscr{B}_0$.
2 - Temos que

$$Hom_{\mathscr{B}}(1,2) = \{b\}$$

bem como

$$Hom_{\mathscr{E}}(1',2') \oplus Hom_{\mathscr{E}}(1',5') = \{b_1\} \oplus \emptyset = \{b_1\}.$$

E como $F(b_1) = b$, temos que a aplicação induzida por F

$$\bigoplus_{\hat{y} \in F^{-1}(2)} Hom_{\mathscr{E}}(1', \hat{y}) \longrightarrow Hom_{\mathscr{B}}(1,2)$$

é uma bijeção. Da mesma forma se verifica que as outras aplicações são bijeções.

Como as condições 1 e 2 são satisfeitas, F é recobrimento de k-categorias.

Notação: Dado $x \in \mathscr{B}_0$, o conjunto $F^{-1}(x) = \{\hat{x} \in \mathscr{E}_0 \mid F(\hat{x}) = x\}$ é chamado a **fibra de F em x.**

Observações:

(1) Se $\mathscr{B}$ é conexo, a condição 2 da definição é suficiente para que o funtor seja funtor recobrimento como demonstrado em ([15], 6.1.2);

(2)Se $p : \mathscr{E} \to \mathscr{B}$ é funtor recobrimento, então p é isomorfismo se, e somente se, $p : \mathscr{E}_0 \to \mathscr{B}_0$ é injetiva como observado em ([15], 6.1.5).

Notação: Diremos que **o funtor recobrimento** $F : \mathscr{E} \to \mathscr{B}$ **é conexo** se $\mathscr{E}$ é conexo.

2.2 Recobrimento genérico de aljava com translação

Definição 2.2. *Seja Γ uma aljava com translação conexa. Diremos que $p : \Gamma' \to \Gamma$ é um* **recobrimento de aljavas com translação** *se ele satisfaz as seguintes condições:*

1. *Γ' é aljava com translação (e denotaremos sua translação por τ');*

2. *Se um vértice $x \in \Gamma'$ é projetivo (injetivo), então px o é;*

3. *p comuta com as translações em Γ e Γ', isto é, $p(\tau' x) = \tau p(x)$, para todo $x \in \Gamma'$ não projetivo;*

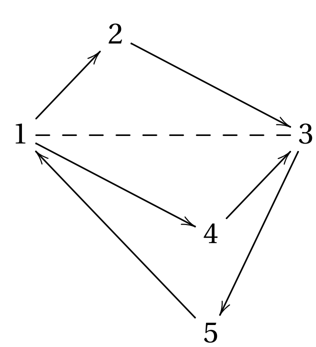
4. *Para cada vértice $x \in \Gamma'$, as aplicações*

$$x^+ \to p(x)^+ \qquad x^- \to p(x)^-$$

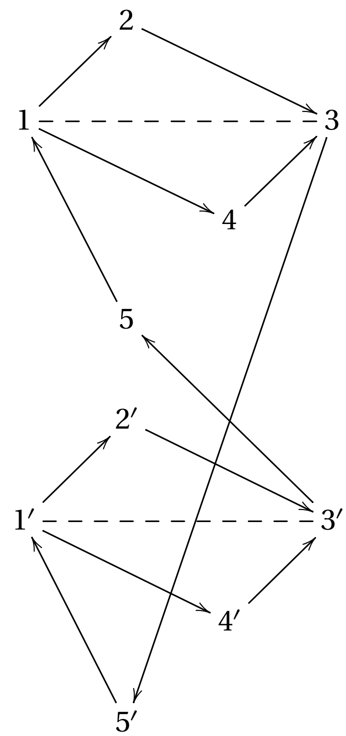
$$\alpha \to p(\alpha) \qquad \alpha \to p(\alpha)$$

induzidas por p são bijeções.

Exemplo 2.2. *Seja Γ a aljava*



Então, tomando Γ' como



e definindo $p : \Gamma' \to \Gamma$ *como* $p(x) = p(x') = x$*, para* $x \in \Gamma$*, e dada as flechas* $\alpha : x \to y$*,* $\alpha' : x' \to y'$*,* $p(\alpha) = p(\alpha') : p(x) \to p(y)$*, então* p *será recobrimento de aljava com translação.*

Queremos definir um tipo especial de recobrimento de aljava com translação. Mas para isso precisaremos definir uma relação de equivalência no conjunto de passeios da aljava. É o que faremos a seguir.

Dada uma aljava com translação Γ sem flechas múltiplas, definamos, de acordo com ([6], 1.2) o grupo fundamental de Γ em $x \in \Gamma_0$. Para isso, introduzimos, para cada $y \in \Gamma_0$ não projetivo, uma nova flecha $\tau y \overset{\varphi_y}{\dashrightarrow} y$. Diremos que ela tem comprimento 2, ao contrário das flechas originais de Γ que têm comprimento 1.

Definição 2.3. *Seja* Γ *uma aljava com translação sem flechas múltiplas. Uma* **relação de homotopia** *no conjunto de passeios de* Γ *é a menor relação de equivalência gerada pelas condições:*

1. *se x é um vértice não projetivo, e a malha em Γ terminando em x tem a forma*

$$
\begin{tikzcd}
 & x_1 \arrow[dr, "\beta_1"] & \\
\tau x \arrow[ur, "\alpha_1"] \arrow[dr, "\alpha_r"'] & \vdots & x \\
 & x_r \arrow[ur, "\beta_r"'] &
\end{tikzcd}
$$

   então $\alpha_i\beta_i \sim \varphi_x$, para todo $i \in \{1,\dots,r\}$.

2. *se $\alpha : x \to y$ é uma flecha em Γ, então $\alpha^{-1}\alpha \sim e_y$ e $\alpha\alpha^{-1} \sim e_x$.*

3. *se γ_1, γ, γ', γ_2 são passeios tais que $\gamma \sim \gamma'$ e as compostas $\gamma_1\gamma\gamma_2$ e $\gamma_1\gamma'\gamma_2$ estão definidas, então $\gamma_1\gamma\gamma_2 \sim \gamma_1\gamma'\gamma_2$.*

A composição de passeios induz uma composição de classes de homotopia da seguinte forma: se $\bar{w}$ denota a classe de homotopia de um passeio w, então $\bar{w}\bar{v}$ é definido sempre que wv é definido,e temos $\bar{w}\bar{v} = \overline{wv}$.

Definição 2.4. *Sejam Γ uma aljava com translação sem flechas múltiplas e $x \in \Gamma_0$. Considere o conjunto $\Pi_1(\Gamma, x)$ das classes de passeios que começam e terminam em x. O conjunto $\Pi_1(\Gamma, x)$ tem estrutura de grupo, com a operação $\bar{w}\bar{v} = \overline{wv}$, em que v e w são elementos de $\Pi_1(\Gamma, x)$. Este grupo é chamado de* **grupo fundamental de** Γ **em** x.

Exemplo 2.3. *Considere Γ a aljava com translação*

$$
\begin{tikzcd}
 & 2 \arrow[dr, "a_2"] & \\
1 \arrow[ur, "a_1"] \arrow[dr, "a_3"'] \arrow[rr, dash, dashed] & & 4 \\
 & 3 \arrow[ur, "a_4"'] &
\end{tikzcd}
$$

calculemos o grupo fundamental de Γ em 1. Para isso, precisamos fixar os ciclos não orientados começando em 1. Além do caminho trivial e_1, temos o ciclo $a_1a_2a_4^{-1}a_3^{-1}$. Mas pela relação de homotopia, temos que $a_1a_2 \sim a_3a_4$, donde $a_1a_2a_4^{-1}a_3^{-1} \sim e_1$, e portanto $\Pi_1(\Gamma, 1) = \{1\}$.

Em [10], encontramos uma extensão da relação de homotopia para uma aljava com translação no caso em que Γ pode ter flechas múltiplas.

Definição 2.5. *Seja* Γ *uma aljava com translação. A menor relação de equivalência no conjunto de passeios de* Γ *gerada pelas condições 1, 2 e 3 da Definição* (2.3)*, além da condição:*

4. se α*,* β *são flechas em* Γ *com mesmo início e mesmo fim, então* $\alpha \sim \beta$

é chamada de **relação genérica**.

Seja Γ uma aljava com translação conexa. Definamos, a partir da relação genérica definida em Γ, uma nova aljava $\tilde{\Gamma}$ da seguinte forma:
Fixado $x \in \Gamma_0$, temos:
- $\tilde{\Gamma}_0$: será conjunto das classes de passeios não orientados de Γ começando em x;
- $\tilde{\Gamma}_1$: dados dois vértices $[\gamma]$, $[\gamma']$, teremos uma flecha $\alpha = (\alpha, [\gamma]) : [\gamma] \to [\gamma']$ sempre que tivermos $[\gamma'] = [\gamma\alpha]$, com $\alpha : t([\gamma]) \to t([\gamma'])$ uma flecha em Γ_1;
- A translação τ' em $\tilde{\Gamma}$ é definida da seguinte forma: se $[\gamma]$ é tal que $t([\gamma])$ não é projetivo, então $\tau[\gamma] = [\gamma\varphi^{-1}_{t([\gamma])}]$, onde $\varphi_{t([\gamma])}$ é a nova flecha de Γ. E se $t([\gamma])$ é projetivo, então $[\gamma]$ será projetivo. De maneira dual, $[\gamma]$ será injetivo se $t([\gamma])$ for injetivo.

Uma vez que a aljava com translação Γ é conexa, a construção de $\tilde{\Gamma}$ independe da escolha do vértice $x \in \Gamma_0$. De fato, dado $y \in \Gamma_0$, podemos fixar um passeio $\delta : y \rightsquigarrow x$ conectando os vértices y e x. Daí, relacionada à cada classe $[\gamma]$ de passeios começando em x, temos uma classe $[\delta\gamma]$ de passeios começando em y, donde a aljava construída a partir do vértice x será a mesma construída a partir do vértice y.

Definição 2.6. *Seja* Γ *uma aljava com translação. O* **recobrimento genérico**

$$\pi : \tilde{\Gamma} \to \Gamma$$

é dado por

$$\pi([\gamma]) = t([\gamma])$$

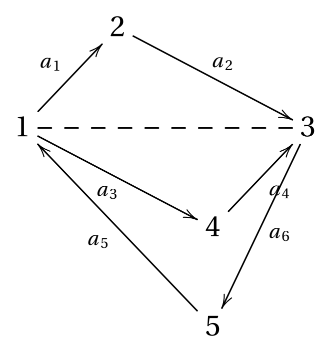
$$\pi(\alpha, [\gamma]) = \alpha.$$

Note que π está bem definido. De fato, sejam γ e δ passeios em Γ tais que $[\gamma] = [\delta]$. Então, pela definição da relação genérica, devemos ter necessariamente $t([\gamma]) = t([\delta])$, pois só há relação entre passeios de mesmo início e mesmo fim. Como $\pi([\gamma]) = t([\gamma])$, e $t([\gamma]) = t([\delta])$, devemos ter $\pi([\gamma]) = \pi([\delta])$.

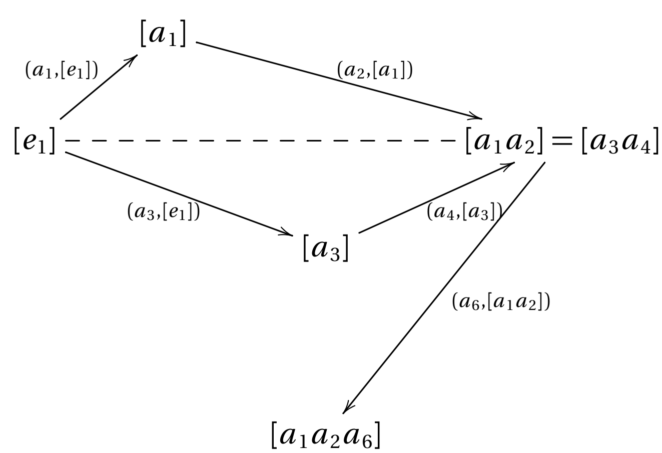
No caso em que Γ não tem flechas múltiplas, o recobrimento genérico passa a ser o recobrimento universal, pois o que os diferencia é o fato de a relação genérica ser gerada, dentre outras relações, por $\alpha \sim \beta$, se $s(\alpha) = s(\beta)$ e $t(\alpha) = t(\beta)$, relação que se torna desnecessária no caso em que Γ não tem flechas múltiplas, isto é, a relação genérica passa a ser a relação de homotopia, que é a que dá origem à aljava do recobrimento universal.

Vejamos agora alguns exemplos de recobrimento genérico:

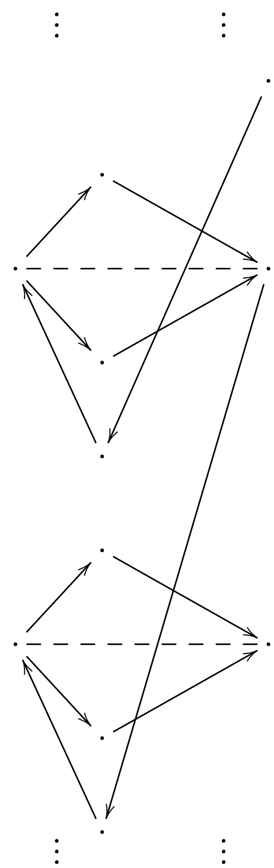
Exemplo 2.4. *1 - Comecemos calculando o recobrimento genérico da aljava dada no Exemplo (2.2), isto é, tomemos* Γ *como*



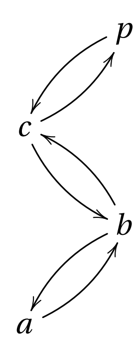
Fixemos o ponto 1*, e analisemos os passeios começando em* 1 *para construir o recobrimento. Começando pelo caminho trivial* e_1*, chegamos inicialmente à seguinte subaljava de* $\tilde{\Gamma}$



Temos que $[a_1a_2] = [a_3a_4]$ *pois ambos os caminhos estão na malha começando em* 1 *e terminando em* 2*. E observe que, de fato,* $\tau([a_1a_2]) = [e_1]$*, pois, por definição, dada* $[\gamma]$ *a classe de um passeio* γ*, temos que* $\tau([\gamma]) = [\gamma\varphi^{-1}_{t(\gamma)}]$*. Neste caso, como* $[\gamma] = [a_1a_2]$*, temos que* $[a_1a_2\varphi^{-1}_{t(a_1a_1)}] = [e_1]$*, pois pela relação genérica, temos* $a_1a_2 \sim \varphi_1$*. Seguindo* *com esta construção, chegamos à seguinte configuração para* $\tilde{\Gamma}$



2 - Seja agora Γ *a aljava*



com p projetivo, $\tau a = a$, $\tau b = b$ e $\tau c = c$. Com as malhas

$$
\begin{tikzcd}
 & p \arrow[dr, "c_1"] & \\
c \arrow[ur, "c_0"] \arrow[dr, "b_1"'] \arrow[rr, dashed, no head, "\varphi_c"'] & & c \\
 & b \arrow[ur, "b_0"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & c \arrow[dr, "b_1"] & \\
b \arrow[ur, "b_0"] \arrow[dr, "a_o"'] \arrow[rr, dashed, no head, "\varphi_b"'] & & b \\
 & a \arrow[ur, "a_1"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & b \arrow[dr, "a_0"] & \\
a \arrow[ur, "a_1"] \arrow[rr, dashed, no head, "\varphi_a"'] & & a
\end{tikzcd}
$$

temos as relações

$$b_1 b_0 \sim c_0 c_1 \sim \varphi_c$$

$$a_0 a_1 \sim b_0 b_1 \sim \varphi_b \ e$$

$$a_1 a_0 \sim \varphi_a$$

Com tais relações, podemos construir a aljava $\tilde{\Gamma}$ do recobrimento genérico de Γ. Fixemos para isso o ponto p. A aljava do recobrimento genérico será então

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
\cdots & & [e_p] \arrow[dr] & & [c_1 c_0] \arrow[dr] & & \cdots \\
 & [c_0^{-1}] \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[rr, dashed, no head] & & [c_1] \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[rr, dashed, no head] & & [c_1 c_0 c_1] & \\
\cdots & & [c_0^{-1} b_1] \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[rr, dashed, no head] & & [c_1 b_1] \arrow[ur] \arrow[dr] & & \cdots \\
 & [c_0^{-1} b_0^{-1} a_0] \arrow[ur] \arrow[rr, dashed, no head] & & [c_0^{-1} b_0^{-1} a_0 a_1 a_0] \arrow[ur] \arrow[rr, dashed, no head] & & [c_0^{-1} b_0^{-1} a_0 a_1 a_0 a_1 a_0] &
\end{tikzcd}
$$

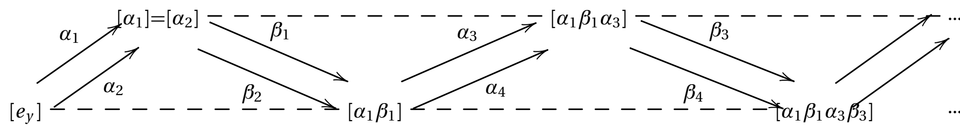
3 - Seja Γ a aljava com translação

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & x \arrow[dr, shift left, "\beta_1"] \arrow[dr, shift right, "\beta_2"'] \arrow[rr, dashed, no head] & & \tau^{-1}x \arrow[dr, shift left, "\beta_3"] \arrow[dr, shift right, "\beta_4"'] \arrow[rr, dashed, no head] & & \tau^{-2}x \arrow[dr, shift left, "\beta_5"] \arrow[dr, shift right, "\beta_6"'] \arrow[rr, dashed, no head] & & \cdots \\
y \arrow[ur, shift left, "\alpha_1"] \arrow[ur, shift right, "\alpha_2"'] \arrow[rr, dashed, no head] & & \tau^{-1}y \arrow[ur, shift left, "\alpha_3"] \arrow[ur, shift right, "\alpha_4"'] \arrow[rr, dashed, no head] & & \tau^{-2}y \arrow[ur, shift left, "\alpha_5"] \arrow[ur, shift right, "\alpha_6"'] \arrow[rr, dashed, no head] & & \tau^{-3}y \arrow[ur, shift left] \arrow[ur, shift right] & \cdots
\end{tikzcd}
$$

que é a componente pós-projetiva da álgebra de Kronecker, que é dada pela aljava

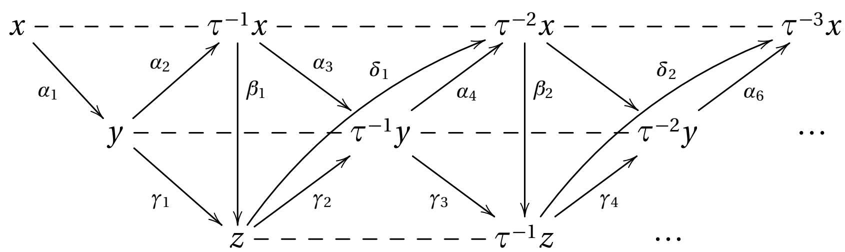
$$
\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, shift left, "\alpha"] \arrow[r, shift right, "\beta"'] & 2
\end{tikzcd}
$$

Fixemos o ponto y para construir $\tilde{\Gamma}$. Como flechas múltiplas são relacionadas, temos a *seguinte configuração para* $\tilde{\Gamma}$



ou seja $\tilde{\Gamma} = \Gamma$.

4 - Seja Γ *a aljava com translação*

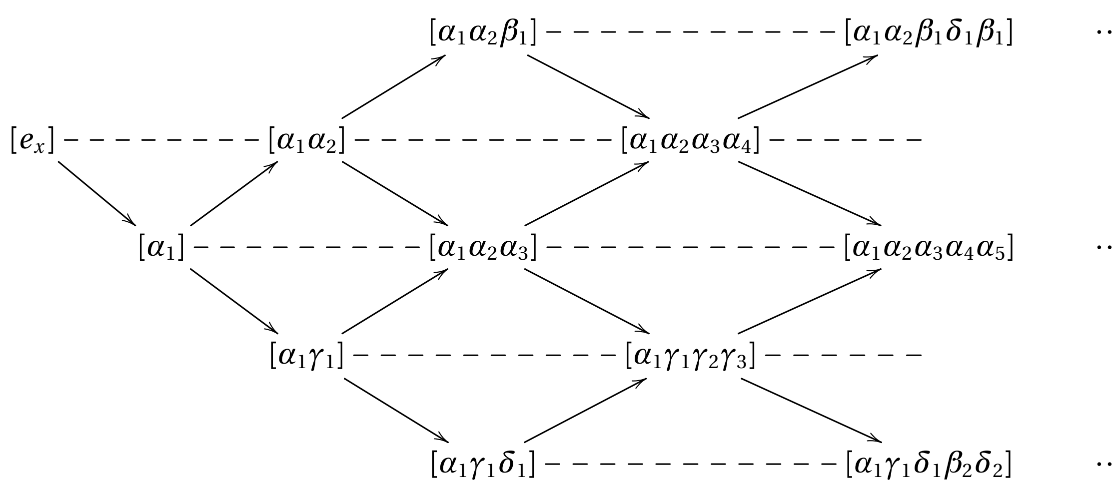


que é a componente pós-projetiva da aljava de Auslander-Reiten associada a k*-álgebra dada pela aljava*

$$1 \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} 2 \xrightarrow{\gamma} 3$$

limitada pelo ideal admissível $I = \langle \beta\gamma \rangle$.

Então $\tilde{\Gamma}$ *é:*



O recobrimento genérico é de fato um recobrimento de aljava com translação. É o que nos mostra o:

Teorema 2.1. *Seja* Γ *uma aljava com translação conexa e* $\pi : \tilde{\Gamma} \to \Gamma$ *seu recobrimento* *genérico. Então π é um recobrimento de aljava com translação.*

Demonstração: Vejamos que são satisfeitas as quatro condições da definição de recobrimento de aljava com translação.
1. $\tilde{\Gamma}$ é aljava com translação: de fato, Γ é localmente finita pois, dado $[\gamma]$ vértice de $(\tilde{\Gamma})_0$, como temos flecha $\alpha : [\gamma] \to [\gamma']$ se, e somente se, $[\gamma\alpha] = [\gamma']$, e só existem finitas flechas começando em $t[\gamma]$ (que é igual à $t[\delta]$, para todo δ tal que $[\gamma] = [\delta]$), temos somente finitas flechas de início $[\gamma]$. Da mesma forma conclui-se que existem finitas flechas com fim $[\gamma]$. Além disso, $\tilde{\Gamma}$ é sem laços. De fato, se temos flecha $\alpha : [\gamma] \to [\gamma]$, então $[\gamma\alpha] = [\gamma]$,donde $t([\gamma\alpha]) = t([\gamma])$. Mas $s(\alpha) = t([\gamma])$, donde teríamos flecha em Γ_1 do tipo $\alpha : t([\gamma]) \to t([\gamma])$, contradizendo o fato de ser Γ sem laços.

2. Seja $[\gamma]$ um vértice projetivo. Então $t([\gamma])$ é projetivo. Como $\pi([\gamma]) = t([\gamma])$, então $\pi([\gamma])$ é projetivo. O mesmo se verifica se $[\gamma]$ é injetivo.

3. Seja $[\gamma]$ não projetivo. Então

$$\pi(\tau'[\gamma]) = \pi([\gamma\varphi^{-1}_{t(\gamma)}]) = t([\gamma\varphi^{-1}_{t(\gamma)}]).$$

Como $\varphi_{t(\gamma)} : \tau t(\gamma) \dashrightarrow t(\gamma)$, então $t([\gamma\varphi^{-1}_{t(\gamma)}]) = \tau t(\gamma)$, e portanto $\pi(\tau'[\gamma]) = \tau(\pi([\gamma]))$.

4. Seja $[\gamma]$ tal que $t(\gamma) = x$. Vejamos que $[\gamma]^+ \to x^+$ é bijetora. Seja $\alpha : x \to y$ uma flecha em Γ_1. Então a flecha $(\alpha, [\gamma]) : [\gamma] \to [\gamma\alpha]$ é tal que $\pi(\alpha, [\gamma]) = \alpha$. Portanto a aplicação é sobrejetora. E sejam $(\alpha, [\gamma])$ e $(\beta, [\gamma])$ em $\tilde{\Gamma}$ tais que $\pi((\alpha, [\gamma])) = \pi((\beta, [\gamma]))$. Pela definição de π, $\alpha = \beta$, donde $(\alpha, [\gamma]) = (\beta, [\gamma])$, e a aplicação é injetora □

2.3 Propriedades do recobrimento genérico

De acordo com a Definição (1.3) a partir de uma aljava com translação obtemos uma categoria da seguinte forma:

1. Obj$k\Gamma = \Gamma_0$;

2. Dados $x, y \in \Gamma_0$, o conjunto dos morfismos de x para y, que denotaremos neste caso por $k\Gamma(x, y)$, é o espaço vetorial gerado pelos caminhos de x para y.

Denotaremos tal categoria pot $k\Gamma$.

Relacionados a essa categoria, temos os seguintes conjuntos:

Definição 2.7. *Seja Γ uma aljava com translação. O* **ideal malha** *é o ideal I_Γ de $k\Gamma$ gerado pelos elementos da forma*

$$\sum_{\alpha:\cdot\to x}(\sigma\alpha)\alpha \in Hom_{k\Gamma}(\tau x, x)$$

onde x é não projetivo e α percorre todas as flechas de fim x.

Definição 2.8. *Dada Γ uma aljava com translação, a* **categoria malha** *é a categoria quociente $k\Gamma/I_\Gamma$, que denotaremos por $k(\Gamma)$.*

Seja u um caminho em Γ. Denotaremos por $\bar{u}$ o morfismo correspondente em $k(\Gamma)$.

Definição 2.9. *Denotaremos por $\tilde{R}k(\Gamma)$ o ideal de $k(\Gamma)$ gerado por*

$$\{\bar{\alpha} \mid \alpha \in \Gamma_1\}$$

A n-ésima potência de $\tilde{R}k(\Gamma)$ é definida recursivamente por $\tilde{R}^0k(\Gamma) = k(\Gamma)$, $\tilde{R}^1k(\Gamma) = \tilde{R}k(\Gamma)$, e $\tilde{R}^{n+1}k(\Gamma) = \tilde{R}k(\Gamma)\cdot\tilde{R}^nk(\Gamma)\ (= \tilde{R}^nk(\Gamma)\cdot\tilde{R}k(\Gamma))$.

A seguinte definição será utilizada no nosso próximo resultado

Definição 2.10. *Dada uma aljava com translação Γ, define-se o* **grafo órbita** *$\mathcal{O}(\Gamma)$ de Γ como segue:*

1. *os vértices de $\mathcal{O}(\Gamma)$ são as τ - órbitas de Γ;*
2. *existe uma aresta $o(x)$ —— $o(y)$ em $\mathcal{O}(\Gamma)$ se Γ contém uma flecha $a \to b$ ou uma flecha $b \to a$, com $a \in o(x)$ e $b \in o(y)$.*

Exemplo 2.5. *1 - Seja A_1 a álgebra de caminhos dada pela aljava*

$$1 \leftarrow 2 \leftarrow 3$$

e seja Γ a aljava de Auslander-Reiten associada a A_1:

$$\begin{tikzcd}
\tau x \arrow[rr, dashed, no head] \arrow[dr] & & x \arrow[rr, dashed, no head] \arrow[dr] & & \tau^{-1}x \\
& \tau y \arrow[ur] \arrow[rr, dashed, no head] \arrow[dr] & & y \arrow[ur] & \\
& & z \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

Então seu grafo órbita $\mathscr{O}(\Gamma)$ é

$$\begin{tikzcd} o(x) \arrow[r, no head] & o(y) \arrow[r, no head] & o(z) \end{tikzcd}$$

ou seja, ele é uma árvore.

2 - Seja A_2 a k-álgebra kQ/I associada à aljava

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[loop above, "\alpha"] \arrow[r, "\beta"] & 2 \end{tikzcd}$$

com I o ideal admissível $\langle \alpha^2 \rangle$, e seja Γ' a aljava de Auslander-Reiten associada à A_2:

$$\begin{tikzcd}
y \arrow[dr] & & & \\
& x \arrow[rr, dashed, no head] \arrow[dr] & & \tau^{-1}x \\
\tau^{-1}x \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[rr, dashed, no head] & & \tau^{-2}x \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
& \tau y \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[rr, dashed, no head] & & y \\
\tau z \arrow[ur] \arrow[rr, dashed, no head] & & z \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Então $\mathscr{O}(\Gamma')$ é

$$\begin{tikzcd} o(z) \arrow[r, no head] & o(y) \arrow[r, no head] & o(x) \arrow[loop right, no head] \end{tikzcd}$$

tendo assim um laço.

3 - Por fim, seja A_3 a k-álgebra associada à aljava:

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, shift left, "\alpha"] \arrow[r, shift right, "\beta"'] & 2 \arrow[r, "\gamma"] & 3 \end{tikzcd}$$

limitada pelo ideal admissível $I = \langle \beta\gamma \rangle$, como no Exemplo (2.4), e seja Γ” a componente *pós-projetiva da aljava de Auslander-Reiten de A_3:*

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[dr] \arrow[rr, dash, dashed] & & \tau^{-1}x \arrow[dd] \arrow[dr] \arrow[rr, dash, dashed] & & \tau^{-2}x \arrow[dd] \arrow[dr] \arrow[rr, dash, dashed] & & \tau^{-3}x \\
& y \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[rr, dash, dashed] & & \tau^{-1}y \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[rr, dash, dashed] & & \tau^{-2}y \arrow[ur] & \cdots \\
& & z \arrow[ur] \arrow[uurr, bend left] \arrow[rr, dash, dashed] & & \tau^{-1}z \arrow[ur] \arrow[uurr, bend left] & \cdots &
\end{tikzcd}$$

Então $\mathcal{O}(\Gamma")$ é

$$\begin{tikzcd}
o(x) \arrow[r, dash] \arrow[rr, dash, bend left] & o(y) \arrow[r, dash] & o(z)
\end{tikzcd}$$

Ou seja, apesar da componente pós-projetiva de $\Gamma"$ não ter ciclo, seu grafo órbita $\mathcal{O}(\Gamma")$ não é uma árvore.

Dado um grafo, chamaremos de **passeio reduzido** a sequência

$$a_0 \text{ --- } a_1 \text{ --- } \cdots \text{ --- } a_{r-1} \text{ --- } a_r$$

tal que as arestas $a_{i-1} - a_i$ e $a_i - a_{i+1}$ são todas distintas, para $1 \leq i < r$. Um vértice em um grafo é considerado um **passeio reduzido trivial**.

A definição dada a seguir pode ser encontrada em [7]

Definição 2.11. *Seja Γ uma aljava com translação sem flechas múltiplas. Diremos que Γ é* **simplesmente conexa** *se Γ não tem ciclo orientado e $\mathcal{O}(\Gamma)$ é uma árvore.*

A definição original de aljava com translação simplesmente conexa foi dada por Bongartz-Gabriel em ([6], 1.6). Ela foi definida como sendo uma aljava com translação conexa, sem flechas múltiplas e com $\Pi_1(\Gamma, x) = 1$, para algum $x \in \Gamma_0$. No mesmo artigo (ver [6], 4.2), foi dada a definição da realização geométrica de uma aljava Γ que, informalmente, é construída considerando cada flecha em Γ_1 como um intervalo, e assumindo em Γ_0 a topologia discreta. A partir disso dá-se uma estrutura topológica à aljava Γ. Uma realização geométrica similar foi feita para um grafo.

Neste mesmo artigo foi provado então que, dado um vértice x em Γ_0, o grupo fundamental $\Pi_1(\Gamma, x)$ de Γ coincide com o grupo fundamental de sua representação geométrica, vista como espaço topológico. Também verificaram que as realizações geométricas de Γ e $\mathcal{O}(\Gamma)$ são homotópico-equivalentes no caso em que Γ é finita. Com isso, pode-se verificar que as definições dadas por Bongartz-Gabriel em [6] e por Liu-Buchweitz em [7] são equivalentes.

Lema 2.2. *Seja Γ uma aljava com translação conexa, sem ciclos orientados.*

(a) Suponha que $\mathcal{O}(\Gamma)$ é árvore. Se existe um caminho seccional γ entre dois vértices, então todo caminho entre esses vértices é seccional, e os vértices de qualquer outro caminho seccional coincidem com os vértices de γ.

(b) Se, além disso, Γ não tem flechas múltiplas, isto é, se Γ é simplesmente conexa, este caminho seccional é o único caminho entre esses dois vértices.

Demonstração:
a) Provemos por indução no comprimento do caminho.

Se tomamos um caminho de comprimento 0, teremos então um caminho de x para x, que é seccional. Se existisse algum outro caminho de x para x diferente do trivial, teríamos um ciclo em Γ de comprimento maior ou igual a 1, contradizendo o fato de ser Γ sem ciclos.

Suponha agora que o resultado vale para um caminho de comprimento menor que r, e seja $p: x = y_0 \to y_1 \to y_2 \to \cdots \to y_r = y$ um caminho seccional. Então o caminho u obtido de p tirando a primeira flecha é um caminho seccional de y_1 para y.

Seja $q: x = x_0 \to x_1 \to \cdots \to x_s = y$ outro caminho de x para y. Vejamos primeiro que $o(x) \neq o(x_t)$, $0 < t \leq s$. Se existisse algum t tal que $o(x) = o(x_t)$, então $x_t = \tau^{-m}x$, para algum m inteiro. Observe que m deve ser positivo, pois do contrário, conseguiríamos um caminho em Γ da forma

$$\tau^{-m}x \to \cdots \to x = x_0 \to \cdots \to \tau^{-m}x$$

isto é, teríamos um ciclo em Γ, contradizendo o fato de Γ ser sem ciclos. Disto temos um caminho

$$\tau^{-1}x \to \cdots \to \tau^{-m}x = x_t$$

de $\tau^{-1}x$ para x_t. E a flecha inicial $x \to y_1$ dá origem a uma flecha $y_1 \to \tau^{-1}x$. Disto obtemos um caminho

$$y_1 \to \tau^{-1}x \to \cdots \to \tau^{-m}x = x_t \to x_{t+1} \to \cdots \to x_s = y$$

mas como p é um caminho seccional, $y_2 \neq \tau^{-1}x$, donde este novo caminho tem vértices diferentes dos vértices de u, uma contradição com a hipótese de indução. Disto $o(x) \neq o(x_t)$, para $0 < t \leq s$. Temos então que a aresta $o(x) - o(x_1)$ é aresta inicial do caminho reduzido de $o(x)$ para $o(y)$ em $\mathcal{O}(\Gamma)$. Como $\mathcal{O}(\Gamma)$ é árvore, por hipótese, $o(x) - o(x_1)$ coincide com a aresta $o(x) - o(y_1)$. Disto devemos ter $o(x_1) = o(y_1)$. Com isso, segue que $x_1 = y_1$, pois do contrário, teríamos $x_1 = \tau^{-m} y_1$, para algum m inteiro. Suponha inicialmente $m \geq 0$. Neste caso, teríamos um caminho

$$\begin{tikzcd}
y_1 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \tau^{-m+1} y_1 \arrow[r] & x \arrow[r] \arrow[dr] & x_1 = \tau^{-m} y_1 \\
& & & & y_1
\end{tikzcd}$$

donde novamente temos um ciclo em Γ, contradizendo a hipótese inicial sobre Γ. E se $m < 0$, então $x_1 = \tau^n y_1$, para $n = -m > 0$, donde teríamos o seguinte caminho em Γ:

$$\begin{tikzcd}
\tau^n y_1 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \tau y_1 \arrow[r] & x \arrow[r] \arrow[dr] & y_1 \\
& & & & \tau^n y_1 = x_1
\end{tikzcd}$$

e teríamos portanto um ciclo em Γ, contradição.

Como $x_1 = y_1$, e qualquer outro caminho de y_1 para y é seccional e tem os mesmos vértices de u, temos então que os caminhos entre x e y são todos seccionais e com os mesmos vértices. Portanto, para todo n, se existe um caminho seccional

$$x = x_0 \to x_1 \to \cdots \to x_n = y$$

entre x e y, qualquer outro caminho entre eles é também seccional e com os mesmos vértices.

b) A demonstração, por indução, é similar à feita em (a). Apenas aqui, na hipótese de indução, u será o único caminho entre y_1 e y. E ao concluirmos que $y_1 = x_1$, do fato de Γ não tem flechas múltiplas, concluímos que p é o único caminho entre x e y $\square$

Observe que no Exemplo (2.5), item 3, a componente pós-projetiva de Γ" não é simplesmente conexa. Podemos concluir isso a partir da contrapositiva do Lema (2.2) (b), pois são satisfeitas as hipóteses iniciais do Lema, mas existem dois caminhos seccionais distintos entre z e $\tau^{-2}x$.

O próximo teorema enunciará propriedades importantes satisfeitas pelo recobrimento genérico. Para ele, precisaremos das seguintes definições:

Definição 2.12. *Seja Γ uma aljava com translação. Dizemos que Γ é* **aljava com comprimento** *se, para quaisquer dois vértices x, y em Γ_0, os caminhos de x para y têm todos o mesmo comprimento.*

Exemplo 2.6. *Um exemplo de aljava com translação com comprimento é a dada no Exemplo 2.3*

$$
\begin{tikzcd}
 & 2 \arrow[dr, "a_2"] & \\
1 \arrow[ur, "a_1"] \arrow[dr, "a_3"'] \arrow[rr, dash, dashed] & & 4 \\
 & 3 \arrow[ur, "a_4"'] &
\end{tikzcd}
$$

Ja a aljava com translação

$$
\begin{tikzcd}
x \arrow[dr] \arrow[rr, dash, dashed] & & \tau^{-1}x \arrow[dd] \arrow[dr] \arrow[rr, dash, dashed] & & \tau^{-2}x \arrow[dd] \arrow[dr] \arrow[rr, dash, dashed] & & \tau^{-3}x & \\
 & y \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[rr, dash, dashed] & & \tau^{-1}y \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[rr, dash, dashed] & & \tau^{-2}y \arrow[ur] & & \cdots \\
 & & z \arrow[ur] \arrow[uurr, bend left] \arrow[rr, dash, dashed] & & \tau^{-1}z \arrow[ur] \arrow[uurr, bend left] & \cdots & &
\end{tikzcd}
$$

não é uma aljava com comprimento, pois temos os caminhos

$$z \to \tau^{-2}x$$

e

$$z \to \tau^{-1}y \to \tau^{-2}x$$

entre z e $\tau^{-2}x$, de comprimentos distintos.

Definição 2.13. *Seja Γ uma aljava com translação. Uma* **função comprimento** *nos vértices de Γ é uma função*

$$\ell : \Gamma_0 \to \mathbb{Z}$$

tal que, para toda flecha $\alpha : x \to y$ em Γ_1, $\ell(y) = \ell(x) + 1$.

Podemos relacionar a função comprimento e o fato de ser Γ uma aljava com comprimento da seguinte forma:

Lema 2.3. *Seja Γ uma aljava com translação. Se Γ tem uma função comprimento, então Γ é uma aljava com comprimento.*

Demonstração: Dados dois vértices x e y em Γ_0, sejam $x \to x_1 \to \cdots \to x_n = y$ um caminho de comprimento n e $x \to x'_1 \to \cdots \to x'_m = y$ um caminho de comprimento m. Então, $\ell(x) + m = \ell(y) = \ell(x) + n$, donde devemos ter necessariamente $n = m$ □

Podemos agora enunciar o principal teorema desta seção:

Teorema 2.4. *Seja Γ uma aljava com translação e $\pi : \tilde{\Gamma} \to \Gamma$ sua cobertura genérica.*
a) Existe uma função comprimento em $\tilde{\Gamma}$. Em particular, $\tilde{\Gamma}$ é com comprimento.
b) Se $\alpha : x \to y$, $\beta : x \to z$ (ou $\alpha : y \to x$, $\beta : z \to x$) são flechas em $\tilde{\Gamma}$ tais que $\pi y = \pi z$, então $y = z$.
c) Para quaisquer vértices $x, y \in \Gamma$, o recobrimento π induz uma bijeção do conjunto de flechas em $\tilde{\Gamma}$ de x para y para o conjunto de flechas de πx para πy.
d) Sejam x e $y \in (\tilde{\Gamma})_0$. Se $u : x = x_0 \to x_1 \to \cdots \to x_l = y$ e $v : x = x'_0 \to x'_1 \to \cdots \to x'_l = y$ são dois caminhos em $\tilde{\Gamma}$ de x para y, e se u é seccional, então $x_i = x'_i, 1 \leq i \leq l-1$. Em particular, todos os caminhos de x para y são seccionais.
e) Sejam $x, y \in \tilde{\Gamma}$ vértices, $u_1, \cdots, u_r$ caminhos dois a dois distintos de comprimento $n \geq 0$ em $\tilde{\Gamma}$ de x para y, e $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ escalares. Então, a seguinte equivalência ocorre:

$$\lambda_1 \bar{u}_1 + \cdots + \lambda_r \bar{u}_r \in \tilde{R}^{n+1} k(\tilde{\Gamma}) \Leftrightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_r = 0.$$

Demonstração:
a) Façamos a construção da função comprimento ℓ. Como queremos função comprimento nos vértices de $\tilde{\Gamma}$, iremos definí-la nos passeios de Γ. Nos passeios triviais e_x, com x vértice de $\tilde{\Gamma}$, $\ell(e_x) = 0$. Nos passeios de comprimento 1, isto é, para $\alpha \in \Gamma_1$, teremos que $\ell(\alpha) = 1$, e $\ell(\alpha^{-1}) = -1$. E para a nova flecha de translação $\varphi_x : \tau x \dashrightarrow x$, definimos $\ell(\varphi_x) = 2$, $\ell(\varphi_x^{-1}) = -2$. Além disso, dado um passeio $\alpha_1 \cdots \alpha_n$ em Γ, temos

$$\ell(\alpha_1 \cdots \alpha_n) = \ell(\alpha_1) + \cdots + \ell(\alpha_n).$$

Então, pela definição da relação genérica, l é constante em cada classe da relação genérica. De fato, temos que

$$\ell(\alpha^{-1}\alpha) = \ell(\alpha^{-1}) + \ell(\alpha) = -1 + 1 = 0 = \ell(e_x) = \ell(e_y) = \ell(\alpha) + \ell(\alpha^{-1}) = \ell(\alpha\alpha^{-1}).$$

E se tomamos uma malha

$$\begin{tikzcd}
& x_1 \arrow[dr, "b_1"] & \\
\tau x \arrow[ur, "\alpha_1"] \arrow[dr, "\alpha_r"'] & \cdots & x \\
& x_r \arrow[ur, "\beta_r"'] &
\end{tikzcd}$$

então $\ell(\alpha_i \beta_i) = \ell(\alpha_i) + \ell(\beta_i) = 1 + 1 = 2 = \ell(\varphi_x)$, para todo i. Disto a função estará bem definida nos vértices de $\tilde{\Gamma}$. Para ver que é função comprimento, resta verificar que, dada flecha $(\alpha, [\gamma']) : [\gamma] \to [\gamma']$, $\ell([\gamma']) = \ell([\gamma]) + 1$. Mas como temos flecha de $[\gamma]$ para

$[\gamma']$, se, e somente se, dado um caminho γ representante de $[\gamma]$, temos que $\gamma\alpha = \gamma'$, com γ' representante de $[\gamma']$, e como $\ell(\gamma\alpha) = \ell(\gamma) + \ell(\alpha) = \ell(\gamma) + 1$, temos que a igualdade se verifica, donde de fato ℓ é função comprimento.

Uma vez que existe função comprimento, temos, pelo Lema (2.3), que $\tilde{\Gamma}$ é com comprimento.

b) Sejam $\alpha : x \to y$, $\beta : x \to z$ flechas em $\tilde{\Gamma}$ tais que $\pi y = \pi z$. Então $y = x\alpha$, e $z = x\beta$, e como $\pi y = \pi z$, $ty = tz$, donde α e β são duas flechas em Γ de mesmo início e mesmo fim. Disto, da definição da relação genérica, $\alpha \sim \beta$, donde $y = x\alpha \sim x\beta = z$.

c) Seja $A = \{\alpha \in \Gamma \mid \alpha : \pi x \to \pi y\}$, e $B = \{\alpha \in \tilde{\Gamma} \mid \alpha : x \to y\}$. Para toda flecha $\alpha : \pi x \to \pi y$, temos flecha $\alpha : x \to y$, donde $| A | \leq | B |$.

Também sabemos que, do fato de ser π recobrimento, existe bijeção do conjunto de flechas saindo de x (ou chegando em y), e o conjunto de flechas saindo de πx (ou chegando em πy). Mas dadas duas flechas $\alpha : x \to y$, $\beta : x \to z$ com $\pi y = \pi z$, temos por (b) que $y = z$, donde deduzimos que $| B | \leq | A |$, donde temos então a igualdade, e portanto (c) está provada.

d) Primeiramente, como $\tilde{\Gamma}$ é com comprimento, temos que $\tilde{\Gamma}$ não tem ciclo orientado, pois se existisse

$$x \to x_1 \to \cdots \to x_n = x$$

então $\ell(x) < \ell(x)$, uma contradição. Além disso, pela forma como é construída $\tilde{\Gamma}$, podemos concluir que $\mathcal{O}(\tilde{\Gamma})$ é uma árvore. Disto temos satisfeitas as condições iniciais do Lema(2.2). Como u e v são dois caminhos de x para y, com o primeiro sendo seccional, devemos, por tal Lema, ter necessariamente v seccional, com $x_i = x'_i$, $1 \leq i \leq l$. Mas veja que aqui os caminhos não precisam ser iguais, uma vez que é possível haver flechas múltiplas entre os vértices.

e) Suponhamos que temos uma combinação de caminhos de comprimento n de x para y pertencente conjunto de combinação de caminhos de comprimento $n+1$ de x para y em $k(\tilde{\Gamma})$. Mas como $\tilde{\Gamma}$ é com comprimento, não existem caminhos não nulos de x para y de comprimento $n+1$, donde $\lambda_1 \bar{u}_1 + \cdots + \lambda_r \bar{u}_r = 0$, isto é, $\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_r u_r$ está em $I_{\tilde{\Gamma}}$, ou seja, para cada u_i tal que $\lambda_i \neq 0$, devemos ter um caminho do tipo $x \to y \to \tau x$, para algum x, donde u_i não seria seccional. Mas por (d) todos os caminhos de x para y devem ser seccionais, donde necessariamente $\lambda_i = 0, \forall i$. A recíproca é imediata $\square$

Capítulo 3

Funtor bem comportado

Seja A uma k-álgebra de dimensão finita e básica, com k algebricamente fechado. Seja Γ uma componente de $\Gamma(mod\, A)$. Denotaremos por $ind\,\Gamma$ a subcategoria plena de $ind\,A$ cujos objetos são os módulos indecomponíveis em Γ. Neste capítulo trabalharemos com um funtor que associa $k(\tilde{\Gamma})$ a $ind\,\Gamma$, buscando propriedades que serão utilizadas posteriormente no estudo do grau de um morfismo irredutível (que definiremos no capítulo seguinte).

3.1 Existência de um funtor bem comportado

Definição 3.1. *Um funtor k-linear $F : k(\tilde{\Gamma}) \to ind\,\Gamma$ é chamado um* **funtor bem comportado** *se:*
a) para todo $x \in \tilde{\Gamma}_0$, $F(x) = \pi x$.
b) Se $\alpha_1 : x \to x_1, \cdots, \alpha_r : x \to x_r$ são as flechas em $\tilde{\Gamma}$ começando em x, então $[F(\bar{\alpha}_1) \cdots F(\bar{\alpha}_r)]^t : Fx \to Fx_1 \oplus \cdots \oplus Fx_r$ é morfismo minimal quase cindido à esquerda.
c) Se $\alpha_1 : x_1 \to x, \cdots, \alpha_r : x_r \to x$ são as flechas em $\tilde{\Gamma}$ terminando em x, então $[F(\bar{\alpha}_1) \cdots F(\bar{\alpha}_r)] : Fx_1 \oplus \cdots \oplus Fx_r \to Fx$ é morfismo minimal quase cindido à direita.

Tal noção pode ser restringida a uma subaljava $\mathscr{X}$ de $k(\tilde{\Gamma})$. Neste caso, um funtor $p : k(\mathscr{X}) \to ind\,\Gamma$ será dito bem comportado se:
a) $px = \pi x$, para todo x em $\mathscr{X}$.
b) dado um vértice $x \in \mathscr{X}$, se $\alpha_1 : x \to x_1, \cdots, \alpha_r : x \to x_r$ são as flechas em $\mathscr{X}$ começando em x, então o morfismo $[p(\bar{\alpha}_1) \cdots p(\bar{\alpha}_r)]^t : \pi x \to \pi x_1 \oplus \cdots \oplus \pi x_r$ é irredutível.
c) dado um vértice $x \in \mathscr{X}$, se $\beta_1 : x_1 \to x, \cdots, \beta_r : x_r \to x$ são as flechas em $\mathscr{X}$ terminando em x, então o morfismo $[p(\bar{\beta}_1) \cdots p(\bar{\beta}_r)] : \pi x_1 \oplus \cdots \oplus \pi x_r \to \pi x$ é irredutível.

d) se um vértice x é não projetivo e se $\mathscr{X}$ contém a malha em $\tilde{\Gamma}$ terminando em x

$$\begin{tikzcd}
 & x_1 \arrow[dr, "\beta_1"] & \\
\tau x \arrow[ur, "\alpha_1"] \arrow[dr, "\alpha_r"'] & \vdots & x \\
 & x_r \arrow[ur, "\beta_r"'] &
\end{tikzcd}$$

então a sequência

$$0 \longrightarrow \tau\pi x \xrightarrow{[p(\bar{\alpha}_1)\cdots p(\bar{\alpha}_r)]^t} \bigoplus_{i=1}^{r} \pi x_i \xrightarrow{[p(\bar{\beta}_1)\cdots p(\bar{\beta}_r)]} \pi x \longrightarrow 0$$

é exata e quase cindida (e dualmente).

No caso em que A é uma álgebra do tipo de representação finita, foi provado em ([6], §3) que sempre existe um funtor bem comportado $F : k(\tilde{\Gamma}) \to ind\Gamma$. Este resultado é baseado em um resultado similar encontrado em ([16], §1), em que um funtor bem comportado $F : k(\tilde{\Gamma}) \to \underline{mod}A$ é construído para A uma k-álgebra auto-injetiva e de tipo de representação finita e Γ componente estável de $\Gamma(mod\, A)$.

Estamos interessados em garantir a existência de um funtor bem comportado para $k(\tilde{\Gamma})$ no caso em que Γ é uma componente da aljava de Auslander-Reiten de A, para A uma k-álgebra de dimensão finita. Os próximos resultados nos possibilitarão verificar a existência de tal funtor. Para eles, precisaremos da seguinte definição:

Definição 3.2. *Seja Γ uma aljava com translação e $\tilde{\Gamma}$ seu recobrimento genérico, de função comprimento ℓ. Denotaremos por $\tilde{\Gamma}_{\leq n}$ (ou $\tilde{\Gamma}_{\geq n}$), a subaljava plena de $\tilde{\Gamma}$ com $(\tilde{\Gamma}_{\leq n})_0$ (ou $(\tilde{\Gamma}_{\geq n})_0$) igual ao subconjunto de $\tilde{\Gamma}_0$ cujos vértices x têm comprimento $\ell(x) \leq n$ (ou $\ell(x) \geq n$).*

Segue da definição que $\tilde{\Gamma}_{\leq n}$ e $\tilde{\Gamma}_{\geq n}$ são subaljavas convexas.

Lema 3.1. *Seja $\pi : \tilde{\Gamma} \to \Gamma$ recobrimento genérico e seja $q : k\mathscr{Y} \to ind\,\Gamma$ um funtor bem comportado, com $\mathscr{Y}$ subaljava plena e convexa de $\tilde{\Gamma}$. Seja ℓ uma função comprimento em $\tilde{\Gamma}$ e suponha que existam inteiros m, $n \in \mathbb{Z}$ tais que $n \leq m$ e $\mathscr{Y} \subseteq \tilde{\Gamma}_{\geq n} \cap \tilde{\Gamma}_{\leq m}$. Então existe uma subaljava plena e convexa $\mathscr{X}$ de $\tilde{\Gamma}$ tal que $\mathscr{Y}$ é subaljava de $\mathscr{X}$, $\mathscr{X} \subseteq \tilde{\Gamma}_{\geq n}$ e $\mathscr{X}$ é estável sobre antecessores em $\tilde{\Gamma}_{\geq n}$ (isto é, cada caminho em $\tilde{\Gamma}_{\geq n}$ com vértice final* *em $\mathscr{X}$ está inteiramente em $\mathscr{X}$), bem como $p : k\mathscr{X} \to ind\,\Gamma$ um funtor bem comportado estendendo q.*

Demonstração: Seja P o conjunto

$$\{(\mathscr{X}, p) : \mathscr{X} \text{ subaljava plena e convexa de } \tilde{\Gamma} \text{ contendo } \mathscr{Y} \text{ e } p : k\mathscr{X} \to ind\,\Gamma \text{ funtor bem comportado que estende } q\,\}.$$

Temos que P é não vazio pois o par $(\mathscr{Y}, q)$ pertence a P.

Dados $(\mathscr{X}, p)$ e $(\mathscr{X}', p')$ em P, diremos que $(\mathscr{X}, p) \leq (\mathscr{X}', p')$ se, e somente se, $\mathscr{X} \subseteq \mathscr{X}'$ e p' estende p. Com esta definição temos uma ordem parcial no conjunto P.

Considere Q subconjunto de P, em que a subaljava $\mathscr{X}$ está contida em $\tilde{\Gamma}_{\geq n} \cap \tilde{\Gamma}_{\leq m}$. Como $(\mathscr{Y}, q)$ pertence à Q, ele é diferente de vazio. E ao tomarmos uma cadeia $\mathscr{C}$ em Q, se considerarmos o par $(\bigcup_{\mathscr{X} \in Q} \mathscr{X}, p')$, onde $p' : \cup\mathscr{X} \to ind\,\Gamma$ é tal que $p'(x) = p(x)$, se $x \in \mathscr{X}$ com $(\mathscr{X}, p) \in Q$, ele será uma cota superior de $\mathscr{C}$, pertencente a Q, donde, pelo Lema de Zorn, Q tem um elemento maximal, que chamaremos de $(\mathscr{X}, p)$. Como $(\mathscr{X}, p) \in Q \subseteq P$, temos que $\mathscr{X}$ é subaljava plena e convexa de $\tilde{\Gamma}$.

Suponha por absurdo que $\mathscr{X}$ não é estável sobre antecessores em $\tilde{\Gamma}_{\geq n}$. Então existe uma flecha $x \to y$ em $\tilde{\Gamma}_{\geq n}$, com $y \in \mathscr{X}$ e $x \notin \mathscr{X}$. Como $\mathscr{X} \subset \tilde{\Gamma}_{\geq n} \cap \tilde{\Gamma}_{\leq m}$, existe x com $\ell(x)$ maximal satisfazendo tal condição. Fixemos tal x. Assim, dado $z \in \mathscr{X}$, não existem flechas em $\tilde{\Gamma}$ de z para x, pois do contrário, teríamos o caminho $z \to x \to y$, com z, $y \in \mathscr{X}$, mas x não pertencente a $\mathscr{X}$, contradizendo o fato de $\mathscr{X}$ ser convexo. Sendo assim, considere a subaljava $\mathscr{X}'$ de $\tilde{\Gamma}$ cujo conjunto de vértices é $\mathscr{X}_0 \cup \{x\}$, e o conjunto de flechas é $\mathscr{X}_1$ unido com o conjunto de flechas em $\tilde{\Gamma}$ começando em x e terminando em algum vértice de $\mathscr{X}$, isto é

$$\begin{array}{ccc} & & x_1 = y \\ & \overset{\alpha_1}{\nearrow} & \\ x & & \vdots \\ & \underset{\alpha_r}{\searrow} & \\ & & x_r \end{array}$$

Como x tem comprimento maximal, segue que $\mathscr{X}'$ é convexa.

Temos as seguintes possibilidades para x:

- x injetivo ou $\tau^{-1}x$ não pertencente à $\mathscr{X}$. Como as flechas $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ saem do mesmo vértice x e são todas distintas, e π é funtor recobrimento, $\pi\alpha_1, \cdots, \pi\alpha_r$ são todas distintas e começam em πx, donde existe morfismo irredutível $[\pi\alpha_1 \cdots \pi\alpha_r]^t : \pi x \to \bigoplus_{i=1}^{r} \pi x_i$. E de acordo com a hipótese sobre x, uma malha está contida em $\mathscr{X}'$ se, e somente se, está contida em $\mathscr{X}$. Sendo assim, podemos estender $p : k\mathscr{X} \to ind\,\Gamma$ para um funtor $p' : k\mathscr{X}' \to ind\,\Gamma$, definindo $p'(\alpha_i) = \pi\alpha_i$.

- x não é injetivo e $\tau^{-1}x \in \mathscr{X}$. Neste caso, como o comprimento de x é maximal, a malha começando em x está em $\mathscr{X}'$, sendo da forma

$$\begin{tikzcd} & x_1 \arrow[dr, "\beta_1"] & \\ x \arrow[ur, "\alpha_1"] \arrow[dr, "\alpha_r"'] & \vdots & \tau^{-1}x \\ & x_r \arrow[ur, "\beta_r"'] & \end{tikzcd}$$

Como p é bem comportado, $[p(\beta_1)\cdots p(\beta_r)] : \bigoplus_{i=1}^{r} \pi x_i \to \tau^{-1}(\pi x)$ é irredutível, e como essas são todas as flechas em Γ terminando em $\tau^{-1}(\pi x)$, tal morfismo é minimal quase cindido à direita, donde temos sequência quase cindida

$$0 \longrightarrow \pi x \xrightarrow{[\pi x_1 \cdots \pi x_r]^t} \bigoplus_{i=1}^{r} \pi x_i \xrightarrow{[p\beta_1 \cdots p\beta_r]} \tau^{-1}\pi x \longrightarrow 0$$

Disto temos extensão de p para $p' : k\mathscr{X}' \to ind\,\Gamma$, com $p'(\alpha_i) = \pi\alpha_i$, para todo i. Tal extensão será funtor bem comportado, pois uma malha está sendo levada em sequência quase cindida.

Em qualquer caso, temos uma extensão de p, e portanto $(\mathscr{X}', p') > (\mathscr{X}, p)$, contradizendo a maximalidade de $(\mathscr{X}, p)$. Portanto, $\mathscr{X}$ deve ser estável sobre antecessores em $\tilde{\Gamma}_{\geq n}$ $\square$

Outra condição que possibilita a extensão de um funtor bem comportado é a seguinte:

Lema 3.2. *Seja $\pi : \tilde{\Gamma} \to \Gamma$ recobrimento genérico e seja $q : k\mathscr{Y} \to ind\,\Gamma$ um funtor bem comportado, com $\mathscr{Y}$ uma subaljava plena e convexa de $\tilde{\Gamma}$. Seja ℓ uma função comprimento em $\tilde{\Gamma}$ e suponha que exista um inteiro $n \in \mathbb{Z}$ tal que $\mathscr{Y} \subseteq \tilde{\Gamma}_{\geq n}$ e $\mathscr{Y}$ é estável sobre antecessores em $\tilde{\Gamma}_{\geq n}$. Então existe uma subaljava plena e convexa $\mathscr{X}$ de Γ tal que $\mathscr{Y}$ é subaljava de $\mathscr{X}$, $\tilde{\Gamma}_{\geq n} \subseteq \mathscr{X}$ e $\mathscr{X}$ é estável sobre sucessores em $\tilde{\Gamma}$ (isto é, cada caminho em $\tilde{\Gamma}$ com vértice inicial em $\mathscr{X}$ está inteiramente em $\mathscr{X}$), bem como $p : k\mathscr{X} \to ind\,\Gamma$ um funtor bem comportado estendendo q.*

Demonstração: Defina P como no Lema (3.1), com a mesma relação parcial.

Seja R subconjunto de P dos pares $(\mathscr{X}, p)$ com $\mathscr{X}$ subaljava plena convexa de $\tilde{\Gamma}$

contido em $\tilde{\Gamma}_{\geq n}$ e estável sobre antecessores em $\tilde{\Gamma}_{\geq n}$, e p funtor bem comportado estendendo q. Como no Lema (3.1), R é não vazio e toda cadeia em R tem cota superior, donde R tem um elemento maximal, que chamaremos $(\mathscr{X}, p)$. Novamente, como $(\mathscr{X}, p) \in R \subseteq P$, temos que $\mathscr{X}$ é subaljava plena e convexa de $\tilde{\Gamma}$.

Suponha por absurdo que $\mathscr{X} \neq \tilde{\Gamma}_{\geq n}$. então podemos tomar $x \in \tilde{\Gamma}_{\geq n}$ de comprimento $\ell(x)$ minimal tal que x não pertence a $\mathscr{X}$. Como x não pertence a $\mathscr{X}$, e $\mathscr{X}$ é estável sobre antecessores, x não tem sucessores em $\mathscr{X}$.

Suponha que não haja nenhuma flecha $y \to x$, com y pertencente a $\mathscr{X}$. Então x não tem antecessor em $\mathscr{X}$, pois se tivesse um antecessor z, o caminho ligando tal antecessor a x passaria por flecha y não pertencente a $\mathscr{X}$. Mas $n \leq \ell(z) < \ell(y) < \ell(x)$, donde temos uma contradição com o fato de ser $\ell(x)$ minimal. Neste caso, a subaljava plena $\mathscr{X}'$ de $\tilde{\Gamma}$ tem como conjunto de vértices $\mathscr{X}_0 \cup \{x\}$, e como flechas as mesmas flechas de $\mathscr{X}$. E $\mathscr{X}'$ é convexa, uma vez que $\mathscr{X}$ é convexa e não existem flechas $x \to y$ ou $y \to x$ em $\mathscr{X}'$. Assim, definimos $p' : k\mathscr{X}' \to ind\,\Gamma$ por $p'(x) = \pi x$, $p'(y) = p(y)$, se $y \in \mathscr{X}$, e $p'(\alpha) = p(\alpha)$, para toda flecha α em $\mathscr{X}'$, donde temos assim funtor bem comportado que é extensão de p.

E se existe $y \in \mathscr{X}$ com $y \to x \in \tilde{\Gamma}$, uma argumentação similar à feita no Lema (3.1) nos dará um par $(\mathscr{X}', p')$ com $(\mathscr{X}', p') \in R$ e $(\mathscr{X}', p') > (\mathscr{X}, p)$, novamente contradizendo a maximalidade de $(\mathscr{X}, p)$.

Em qualquer caso, acabamos concluindo que $\mathscr{X} = \tilde{\Gamma}_{\geq n}$, sendo então estável sobre sucessores em $\tilde{\Gamma}$ □

A partir desses dois resultados, temos a seguinte proposição sobre a existência de funtor bem comportado:

Proposição 3.3. *Seja $\pi : \tilde{\Gamma} \to \Gamma$ recobrimento genérico e seja $q : k\mathscr{Y} \to ind\,\Gamma$ um funtor bem comportado, com $\mathscr{Y}$ subaljava plena e convexa de $\tilde{\Gamma}$. Seja ℓ uma função comprimento em $\tilde{\Gamma}$ e assuma que ao menos uma dessas condições ocorre:*
a) Existem inteiros $m, n \in \mathbb{Z}$ tais que $n \leq m$ e $\mathscr{Y} \subseteq \tilde{\Gamma}_{\geq n} \cap \tilde{\Gamma}_{\leq m}$.
b) Existe um inteiro $n \in \mathbb{Z}$ tal que $\mathscr{Y} \subseteq \tilde{\Gamma}_{\geq n}$ e $\mathscr{Y}$ é estável sobre antecessores em $\tilde{\Gamma}_{\geq n}$ (isto é, cada caminho em $\tilde{\Gamma}_{\geq n}$ com vértice final em $\mathscr{Y}$ está inteiramente em $\mathscr{Y}$).
c) Existe um inteiro $n \in \mathbb{Z}$ tal que $\tilde{\Gamma}_{\geq n} \subseteq \mathscr{Y}$ e $\mathscr{Y}$ é estável sobre sucessores em $\tilde{\Gamma}$.

Então existe um funtor bem comportado $F : k(\tilde{\Gamma}) \to ind\,\Gamma$ tal que $F(\overline{\alpha}) = q(\alpha)$ para cada flecha $\alpha \in \mathscr{Y}$.

Demonstração: Pelos Lemas (3.1) e (3.2), temos que, supondo $\mathscr{Y}$ uma subaljava plena e convexa de $\tilde{\Gamma}$ satisfazendo (a), obtemos uma extensão $p : k\mathscr{X} \to ind\,\Gamma$ de q com $\mathscr{X}$ uma subaljava plena e convexa de $\tilde{\Gamma}$ satisfazendo (b), e supondo $\mathscr{Y}$ uma subaljava plena e convexa de $\tilde{\Gamma}$ satisfazendo (b), obtemos uma extensão $p : k\mathscr{X} \to ind\,\Gamma$ de q com $\mathscr{X}$ uma subaljava plena e convexa de $\tilde{\Gamma}$ satisfazendo (c). Verificaremos agora que, supondo $\mathscr{Y}$ satisfazendo (c), teremos um funtor bem comportado $F : k\tilde{\Gamma} \to ind\,\Gamma$. Com isto, para obter um funtor bem comportado $F : k(\tilde{\Gamma}) \to ind\Gamma$, basta fazer a fatoração pelo ideal malha.

Suponha então que $\mathscr{Y}$ satisfaz (c). Defina P como no Lema (3.1), com a mesma ordem parcial. Seja S subconjunto de P dos pares $(\mathscr{X}, p)$, com $\mathscr{X}$ subaljava plena convexa contendo $\mathscr{Y}$ e estável sobre sucessores em $\tilde{\Gamma}$ e p é funtor bem comportado estendendo q. Novamente S é não vazio e toda cadeia em R possui cota superior, donde existe um elemento maximal $(\mathscr{X}, p)$ em S.

Suponha por absurdo $\mathscr{X} \neq \tilde{\Gamma}$.

Como $\tilde{\Gamma}_{\geq n} \subset \mathscr{X}$, podemos tomar $x \in \tilde{\Gamma}$ com comprimento $\ell(x)$ maximal tal que x não pertence à $\mathscr{X}$. Como x não pertence a $\mathscr{X}$ e $\mathscr{X}$ é estável sobre sucessores em $\tilde{\Gamma}$, não existe flecha $z \to x$ com $z \in \mathscr{X}$. E se existe flecha $x \to y$ em $\tilde{\Gamma}$, então, como $\ell(x) < \ell(y)$ e x é com comprimento $\ell(x)$ maximal, $y \in \mathscr{X}$.

Seja $\mathscr{X}'$ subaljava plena de $\tilde{\Gamma}$ cujo conjunto de vértices é $\mathscr{X}_0 \cup \{x\}$. As flechas de $\mathscr{X}'$ são as flechas de $\mathscr{X}$ e as flechas de $\tilde{\Gamma}$ que começam em x. Nessas condições, $\mathscr{X}'$ é conexa. Com os mesmos argumentos usados para demonstrar o Lema (3.1), concluímos que existe um funtor bem comportado $p' : k\mathscr{X}' \to ind\,\Gamma$ com $(\mathscr{X}', p') > (\mathscr{X}, p)$, o que contradiz a maximalidade de $(\mathscr{X}, p)$.

Portanto, $\mathscr{X} = \tilde{\Gamma}$, donde temos um funtor bem comportado $p : k(\tilde{\Gamma}) \to ind\,\Gamma$, e o teorema está demonstrado □

3.2 Família seccional

Definição 3.3. *Seja X um módulo indecomponível em Γ e $r \geq 1$. Uma* **família seccional** *de caminhos (começando em X e de morfismos irredutíveis) é uma família*

$$\begin{tikzcd}
 & X_{1,1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & X_{1,l_1-1} \arrow[r, "f_{1,l_1}"] & X_{1,l_1} \\
X \arrow[ur, "f_{1,1}"] \arrow[dr, "f_{r,1}"'] & & \vdots & & \\
 & X_{r,1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & X_{r,l_r-1} \arrow[r, "f_{r,l_r}"] & X_{r,l_r}
\end{tikzcd}$$

de r caminhos começando em X e de morfismos irredutíveis entre módulos indecomponíveis, satisfazendo as seguintes condições (com $X = X_{i,0}$):

a) Para cada $M \in \Gamma$ e $l \geq 1$, seja I o conjunto dos índices $i \in \{1, \cdots, r\}$ tais que $l_i \geq 1$, e $f_{i,l}$ tem domínio M. Então o morfismo $[f_{i,l} : i \in I] : M \to \oplus X_{i,l}$ é irredutível.
b) Para cada $M \in \Gamma$ e $l \geq 1$, seja J o conjunto dos índices $i \in \{1, \cdots, r\}$ tais que $l_i \geq 1$, e $f_{i,l}$ tem codomínio M. Então o morfismo $[f_{i,l} : i \in J]^t : \oplus X_{i,l} \to M$ é irredutível.
c) Não existe caminho da forma

$$X_{i,j} \xrightarrow{f_{i,j}} X_{i,j+1} = X_{i',j+1} \xrightarrow{f_{i',j+1}} X_{i',j+2}$$

com $X_{i,j} \simeq \tau X_{i',j+2}$.

Exemplo 3.1. *Seja novamente A a álgebra de caminhos dada pela aljava*

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, shift left, "\alpha"] \arrow[r, shift right, "\beta"'] & 2 \arrow[r, "\gamma"] & 3 \end{tikzcd}$$

limitada pelo ideal admissível $I = \langle \beta\gamma \rangle$, e Γ

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[rr, dash, dashed] \arrow[dr, "\alpha_1"'] & & \tau^{-1}x \arrow[rr, dash, dashed] \arrow[dd, "\beta_1"] \arrow[dr, "\alpha_3"] & & \tau^{-2}x \arrow[rr, dash, dashed] \arrow[dd, "\beta_2"] \arrow[dr] & & \tau^{-3}x \\
& y \arrow[rr, dash, dashed] \arrow[ur, "\alpha_2"] \arrow[dr, "\gamma_1"'] & & \tau^{-1}y \arrow[rr, dash, dashed] \arrow[ur, "\alpha_4"] \arrow[dr, "\gamma_3"] & & \tau^{-2}y \arrow[ur, "\alpha_6"'] & & \cdots \\
& & z \arrow[rr, dash, dashed] \arrow[ur, "\gamma_2"] \arrow[uurr, bend left, "\delta_1"] & & \tau^{-1}z \arrow[ur, "\gamma_4"] \arrow[uurr, bend left, "\delta_2"] & & \cdots &
\end{tikzcd}$$

a componente pós-projetiva da aljava de Auslander-Reiten de A. Então

$$\begin{tikzcd}
& \tau^{-1}y \arrow[r, "\gamma_3"] & \tau^{-1}z \arrow[r, "\delta_2"] & \tau^{-3}x \\
\tau^{-1}x \arrow[ur, "\alpha_3"] \arrow[dr, "\beta_1"'] & & & \\
& z \arrow[r, "\gamma_2"'] & \tau^{-1}y \arrow[r, "\alpha_4"'] & \tau^{-2}x
\end{tikzcd}$$

é um exemplo de família seccional em Γ. Observe que

$$\tau^{-1}x \oplus z \xrightarrow{[\alpha_3\ \gamma_2]} \tau^{-1}y$$

é um morfismo irredutível, pois é morfismo minimal quase cindido à direita.

A proposição a seguir nos permite obter um funtor bem comportado

$F : k(\tilde{\Gamma}) \to ind\,\Gamma$ a partir de uma família seccional em Γ.

Proposição 3.4. *Seja Γ uma aljava com translação. A cada família seccional em Γ*

$$\begin{array}{ccccccc} & & X_{1,1} & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & X_{1,l_1-1} & \xrightarrow{f_{1,l_1}} & X_{1,l_1} \\ & \overset{f_{1,1}}{\nearrow} & & & & & \\ X & & & \vdots & & & \\ & \underset{f_{r,1}}{\searrow} & & & & & \\ & & X_{r,1} & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & X_{r,l_r-1} & \xrightarrow{f_{r,l_r}} & X_{r,l_r} \end{array}$$

corresponde uma família seccional em $\tilde{\Gamma}$

$$\begin{array}{ccccccc} & & x_{1,1} & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & x_{1,l_1-1} & \xrightarrow{\alpha_{1,l_1}} & x_{1,l_1} \\ & \overset{\alpha_{1,1}}{\nearrow} & & & & & \\ x & & & \vdots & & & \\ & \underset{\alpha_{r,1}}{\searrow} & & & & & \\ & & x_{r,1} & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & x_{r,l_r-1} & \xrightarrow{\alpha_{r,l_r}} & x_{r,l_r} \end{array}$$

tal que $\pi x_{i,j} = X_{i,j}$, para cada $i,\ j$, e as flechas $\alpha_{i,j}$ são duas a duas distintas. Mais ainda, sob essas condições, existe funtor bem comportado $F : k(\tilde{\Gamma}) \to ind\,\Gamma$ tal que $F(\overline{\alpha_{i,j}}) = f_{i,j}$, para todo $i,\ j$.

Demonstração: Considere, para todo i, o caminho seccional $X \to X_{i,1} \to \cdots \to X_{i,l_{i-1}} \to X_{i,l_i}$ em Γ de morfismos irredutíveis. Como temos $\pi : \tilde{\Gamma} \to \Gamma$ recobrimento genérico, tal caminho define um caminho $x \to x_{i,1} \to \cdots \to x_{i,l_{i-1}} \to x_{i,l_i}$, também seccional, em $\tilde{\Gamma}$, com $\pi x_{i,j} = X_{i,j}$. Com isso já temos definidos os vértices $x_{i,j}$, e também as flechas $\alpha_{i,j}$.

Vejamos agora como garantir que todas as flechas são distintas. Tome $y,\ z \in \tilde{\Gamma}$. Seja K o conjunto de pares (i,j), $i \in \{1,\cdots,r\}$, $j \in \{1,\cdots,l_i\}$ tal que $y = x_{i,j-1}$, $z = x_{i,j}$. Se temos (i,j) e $(i',j') \in K$, então como temos dois caminhos de x para z e $\tilde{\Gamma}$ é com comprimento, então $j = j'$. Pelas condições (a) e (b) da definição de família seccional, os morfismos $f_{i,j} : \pi y \to \pi z$, com $(i,j) \in K$, são, como consequência do Teorema (1.22) , todos linearmente independentes módulo $R^2(\pi y, \pi z)$, donde para cada elemento $(i,j) \in K$ conseguimos associar um morfismo irredutível distinto $f_{i,j}$ em $\tilde{\Gamma}$, donde, pela construção de $\tilde{\Gamma}$, podemos definir uma função injetora que associa $(i,j) \in K$ à um morfismo $\alpha_{i,j}$ de y para z em $\tilde{\Gamma}$, donde temos assim que as flechas $\alpha_{i,j}$ para $i \in \{1,\cdots,r\}$, $j \in \{1,\cdots,l_i\}$, definidas são todas distintas.

Resta agora conseguir um funtor bem comportado $F : k(\tilde{\Gamma}) \to ind\,\Gamma$. Para isso construiremos funtor bem comportado para alguma subaljava $\mathscr{Y}$ de $\tilde{\Gamma}$ de tal modo que possamos usar a Proposição (3.3).

Seja então $\mathscr{Y}$ subaljava plena formada pelos vértices $x_{i,j}$ e portanto contendo as flechas $\alpha_{i,j}$ acima definidas. Podemos observar inicialmete que $\mathscr{Y}$ é convexa. De fato, dado um caminho

$$x_{i,j} \to y_1 \to \cdots \to y_s \to x_{i',j'} \quad (*)$$

com $y_1, \cdots, y_s \in \tilde{\Gamma}$. Tome então o caminho

$$x \to \cdots \to y_1 \to \cdots y_s \to x_{i',j'}$$

Como temos o caminho

$$x \to x_{i',1} \to \cdots \to x_{i',j'-1} \to x_{i',j'}$$

e a imagem por π de tal caminho é o caminho

$$X \to X_{i',1} \to \cdots \to X_{i',j'}$$

que é seccional, e sendo π funtor recobrimento, e portanto τ comuta com π, tal caminho é seccional, donde pela propriedade (d) do Teorema (2.4) temos que o comprimento dos dois caminhos é igual, e todos os vértices correspondentes são iguais, donde o caminho $(*)$ está em $\mathscr{Y}$. Com isto provamos que $\mathscr{Y}$ é convexo.

Outra propriedade de $\mathscr{Y}$ é que os caminhos em $\mathscr{Y}$ são todos seccionais, donde não existe caminho $y \to \cdot \to z$, com z não projetivo e $y = \tau z$. Também podemos observar que se existe flecha em $\mathscr{Y}$ de y para z, então existem $i,\ j$ tais que $y = x_{i,j-1}$, $z = x_{i,j}$.

Definamos agora um funtor bem comportado $q : k\mathscr{Y} \to ind\,\Gamma$. Seja $y, z \in \mathscr{Y}$ tal que existe flecha $y \to z$. Então existem $i,\ j$ com $y = x_{i,j-1}$, $z = x_{i,j}$. O conjunto de flechas de y para z em $\tilde{\Gamma}$ é igual a união do conjunto A de flechas de y para z que aparecem na família seccional definida anteriormente, com o conjunto formado pelas flechas $\gamma_1, \cdots, \gamma_s$, todas distintas, nenhuma das quais iguais às flechas de A. Como π induz bijeção do conjunto de flechas de y para z com o conjunto de flechas de πy para πz, sendo $f_{i,j}$ a flecha associada à $\alpha_{i,j} \in A$, existem flechas $g_1, \cdots, g_s : \pi y \to \pi z$ tal que $g_1, \cdots, g_s$ junto com as flechas $f_{i,j}$ são linearmente independentes módulo $R^2(\pi y, \pi z)$. Então tomamos $q(\alpha_{i,j}) = f_{i,j}$, e $q(\gamma_k) = g_k$. Isto define q em todas as flechas de y para z, para todos os vértices $y, z \in \mathscr{Y}_0$. Com q definida desta forma, temos que as condições (a) (b) e (c) da definição de funtor bem comportado para uma subaljava de $\tilde{\Gamma}$ são satisfeitas. E como não existe caminho $y \to \cdot \to z$ com $\tau z = y$, a condição (d) não precisa ser verificada, donde q é funtor bem comportado.

Por fim, seja ℓ uma função comprimento em $\tilde{\Gamma}$. Seja $y \in \mathscr{Y}$. Então $\ell(y) \in \{\ell(x), \ell(x)+1, \cdots, \ell(x)+max\{l_i\}_{1\leq i\leq r}\}$. Disto $\mathscr{Y} \subset \tilde{\Gamma}_{\geq l(x)} \cap \tilde{\Gamma}_{\leq(\ell(x)+max\{l_i\}_{1\leq i\leq r})}$, donde $\mathscr{Y}$ satisfaz a condição (a) da Proposição (3.3), e portanto existe um funtor bem comportado $F : k(\tilde{\Gamma}) \to ind\,\Gamma$ tal que $F(\bar{\alpha_{i,j}}) = q(\alpha_{i,j}) = f_{i,j}$, para todo i, j □

Corolário 3.5. *Sejam $X_1, \cdots, X_r$ em Γ e $f = [f_1 \cdots f_r]^t : X \to X_1 \oplus \cdots \oplus X_r$ morfismo irredutível em mod A. Seja $x \in \pi^{-1}(X)$ e $\alpha_i : x \to x_i$ uma flecha em $\tilde{\Gamma}$ tal que $\pi x_i = X_i$, para cada i, $1 \leq i \leq r$. Então existe um funtor bem comportado $F : k(\tilde{\Gamma}) \to ind\,\Gamma$ tal que $F(\overline{\alpha_i}) = f_i$, para cada i.*

Demonstração: Basta notar que $X \to X_1 \oplus \cdots \oplus X_r$ é família seccional □

Com esta propriedade temos garantida a existência de um funtor bem comportado para uma componente Γ da aljava de Auslander-Reiten de uma k-álgebra de dimensão finita e básica com k algebricamente fechado. De fato, basta tomar um vértice X (que não seja poço) em Γ_0, e considerar morfismos irredutíveis com início em X. O Corolário (3.5) então garante a existência de um funtor bem comportado em Γ.

3.3 Propriedades do funtor bem comportado

Demonstraremos agora importantes propriedades que podem ser obtidas de um funtor bem comportado. Antes disso, vejamos o:

Lema 3.6. *Seja $F : k(\tilde{\Gamma}) \to ind\,\Gamma$ um funtor bem comportado, x e y vértices em $\tilde{\Gamma}$, e $n \geq 0$. Então:*
a) F induz um morfismo

$$\tilde{R}^n k(\tilde{\Gamma})(x,y) \longrightarrow R^n(Fx, Fy)$$

b) Seja $f \in R^{n+1}(Fx, Fy)$, e $\alpha_1 : x \to x_1, \cdots, \alpha_r : x \to x_r$ em $\tilde{\Gamma}$ as flechas em $\tilde{\Gamma}$ começando em x. Então existe $h_i \in R^n(Fx, Fy)$, para cada i, tal que $f = \sum_{i=1}^{r} h_i F(\bar{\alpha}_i)$.

Demonstração:
a) Considere um morfismo em $\tilde{R}^n k(\tilde{\Gamma})(x,y)$. Por definição de F, $F(x) = \pi x$ e $Fy = \pi y$ são módulos indecomponíveis de $ind\ \Gamma$, e se $\bar{u}$ é uma classe de um caminho de comprimento maior ou igual à n em $\tilde{R}^n k(\tilde{\Gamma})$, então sua imagem $F(\bar{u})$ é uma composição de n morfismos irredutíveis (pela definição de funtor bem comportado), e

portanto esta composição está em $R^n(Fx, Fy)$, pois cada irredutível está no radical.

b) Como $f \in R^{n+1}(Fx, Fy)$, pelo Teorema (1.21) existem $f_j \in R(Fx, Y_j)$, $g_j \in R^n(Y_j, Fy)$, com cada Y_j indecomponível e $f = \sum_{j=1}^{s} g_j f_j$. Do fato de ser F um funtor bem comportado segue que $[F(\bar{\alpha}_1) \cdots F(\bar{\alpha}_r)]^t : Fx \to \bigoplus_{i=1}^{r} Fx_i$ é um morfismo minimal quase cindido à esquerda. Daí, como cada f_j está em $R(Fx, Y_j)$, segue que f_j se fatora por $[F(\bar{\alpha}_1) \cdots F(\bar{\alpha}_r)]^t$, isto é, $f_j = \sum_{i=1}^{r} f'_{j,i} F(\bar{\alpha}_i)$. Tomando então $h_i = \sum_{i=1}^{r} g_j f'_{i,j}$, como $g_j \in R^n(Y_j, Fy)$, segue que $h_i \in R^n(Fx_i, Fy)$, para cada i, e $f = \sum_{i=1}^{r} h_i F(\bar{\alpha}_i)$ □

Tomemos Γ uma aljava com translação e $\pi : \tilde{\Gamma} \to \Gamma$ sua cobertura genérica. Sejam $\alpha_i : x \to x_i$, $1 \leq i \leq r$ todas as flechas em $\tilde{\Gamma}$ começando em x. Suponha que exista funtor bem comportado $F : k(\tilde{\Gamma}) \to ind\,\Gamma$. Então sabemos que

$$Fx \xrightarrow{[F(\bar{\alpha}_1) \cdots F(\bar{\alpha}_r)]^t} \bigoplus_{i=1}^{r} F(x_i)$$

é morfismo minimal quase cindido à esquerda.

Considerando esse fato, apresentaremos agora a demonstração de um importante resultado que fala sobre propriedades do funtor bem comportado. Parte do que é demonstrado em (b) foi provado primeiramente em ([16], §2) quando se toma a parte estável da aljava de Auslander-Reiten de uma algebra auto-injetiva de tipo de representação finita (ver também ([6], 3.1 Ex. (b)) para o caso da aljava de Auslander-Reiten de uma álgebra do tipo de representação finita).

Teorema 3.7. *Seja $F : k(\tilde{\Gamma}) \to ind\,\Gamma$ funtor bem comportado, x, y vértices em $\tilde{\Gamma}$ e $n \geq 0$. Então*
a) As seguintes aplicações induzidas por F são bijeções de k-espaços vetoriais:

$$\bigoplus_{Fz=Fy} \tilde{R}^n k(\tilde{\Gamma})(x,z)/\tilde{R}^{n+1} k(\tilde{\Gamma})(x,z) \longrightarrow R^n(Fx, Fy)/R^{n+1}(Fx, Fy)$$

$$\bigoplus_{Fz=Fy} \tilde{R}^n k(\tilde{\Gamma})(z,x)/\tilde{R}^{n+1} k(\tilde{\Gamma})(z,x) \longrightarrow R^n(Fy, Fx)/R^{n+1}(Fy, Fx)$$

b) As seguintes aplicações induzidas por F são injetivas:

$$\bigoplus_{Fz=Fy} k(\tilde{\Gamma})(x,z) \longrightarrow Hom_A(Fx,Fy) \ e \ \bigoplus_{Fz=Fy} k(\tilde{\Gamma})(z,x) \longrightarrow Hom_A(Fy,Fx)$$

Demonstração:

a) Mostraremos que apenas a primeira função é bijetora. A demonstração para a outra função é feita de maneira análoga.

Denotaremos por F_n a aplicação

$$\bigoplus_{Fz=Fy} \tilde{R}^n k(\tilde{\Gamma})(x,z)/\tilde{R}^{n+1}k(\tilde{\Gamma})(x,z) \longrightarrow R^n(Fx,Fy)/R^{n+1}(Fx,Fy)$$

Faremos a prova do teorema por indução em $n \geq 0$.

Comecemos mostrando que F_n é sobrejetora, para todo n. O caminho neste caso será provar que, dado um morfismo $f \in R^n(Fx,Fy)$, existe

$$(\phi_z)_z \in \bigoplus_{Fz=Fy} \tilde{R}^n k(\tilde{\Gamma})(x,z)$$

tal que

$$f = \sum_{Fz=Fy} F(\phi_z) mod \ R^{n+1}(Fx,Fy).$$

Seja $n=0$, e f pertencente a $\mathrm{Hom}_A(Fx,Fy)$. Denotemos por $\bar{f}$ a classe de f em $Hom_A \ (Fx,Fy)/R(Fx,Fy)$. Se $Fx \neq Fy$, então $f \in R(Fx,Fy)$, e assim $\bar{f}$ é nula em $R^0(Fx,Fy)/R(Fx,Fy)$. Logo o zero do espaço vetorial

$$\bigoplus_{Fz=Fy} \tilde{R}^0 k(\tilde{\Gamma})(x,z)/\tilde{R}k(\tilde{\Gamma})(x,z)$$

é levado em $\bar{f}$. E se $Fx = Fy$, então f estará em $End_A \ Fx$. Sendo Fx indecomponível, $End_A \ (Fx)$ é local. Podemos ter f isomorfismo ou não isomorfismo. Se f não for isomorfismo, neste caso f pertence a $R(End_A(Fx))$, donde $\bar{f}=0$, bastando tomar o zero do espaço vetorial

$$\bigoplus_{Fz=Fx} \tilde{R}^0 k(\tilde{\Gamma})(x,z)/\tilde{R}k(\tilde{\Gamma})(x,z)$$

e ele terá como imagem por F_0, $\bar{f}$. E se f for isomorfismo, como pelo Teorema (1.2) $End_A(Fx)/R(End_A(Fx)) \simeq k$, e como f não pertence a $R(End_A \ (Fx))$, podemos escrever $f = \lambda 1_{Fx} \ mod \ R(Fx,Fx)$, para algum $\lambda \in k$. Como F é funtor recobrimento, leva identidade em identidade, donde

$$f = F(\lambda 1_x)\ mod\ R(Fx,Fx) = \lambda 1_{Fx}\ mod\ R(Fx,Fx).$$

Seja agora $n \geq 0$ e suponha F_n sobrejetora. Seja $f \in R^{n+1}(Fx,Fy)$ e sua classe $\bar{f} \in R^{n+1}(Fx,Fy)/R^{n+2}(Fx,Fy)$. Pelo Lema (3.6), existe decomposição

$$f = \sum_{i=1}^{r} h_i F(\bar{\alpha}_i),\ \ com\ \ h_i \in R^n(Fx_i,Fy).$$

Aplicando a hipótese de indução para h_i, temos que existe $(\phi_{i,z}) \in \tilde{R}^n k(\tilde{\Gamma})(x_i,z)$ com

$$h_i = \sum_z F(\phi_{i,z}) mod\ R^{n+1}(Fx_i,Fy)$$

e portanto

$$f = \sum_{i=1}^{r} \sum_{Fy=Fz} F(\phi_{i,z}\bar{\alpha}_i) mod\ R^{n+2}(Fx,Fy)$$

e portanto F_{n+1} é sobrejetora, donde F_n é sobrejetora para todo $n \geq 0$.

Mostremos agora que F_n é injetora, para todo $n \geq 0$. O caminho aqui será demonstrar que, para todo $n \geq 0$, vale:
(H_n): Se $(\phi_z)_z \in \bigoplus_{Fz=Fy} k(\tilde{\Gamma})(x,z)$ é tal que $\sum_z F(\phi_z) \in R^{n+1}(Fx,Fy)$, então $\phi_z \in \tilde{R}^{n+1} k(\tilde{\Gamma})(x,z)$, para todo z tal que $Fz = Fy$.

Assuma $n = 0$, e seja $(\phi_z)_z \in k(\tilde{\Gamma})(x,z)$ tal que $\sum_z F(\phi_z) \in R(Fx,Fy)$. Supondo que $Fx \neq Fy$,e tomando z tal que $Fy = Fz$, segue que $z \neq x$, pois do contrário $Fy = Fz = Fx$. Sendo $z \neq x$, então $\phi_z \in \tilde{R}k(\Gamma)(x,z)$. E se $Fx = Fy$, então para cada z tal que $z \neq x$, $\phi_z \in \tilde{R}k(\tilde{\Gamma})(x,z)$. E se $x = z$, como ϕ_z neste caso será um caminho de x para x, e sendo $\tilde{\Gamma}$ componente com comprimento, a única posssibilidade de um caminho de x para x é tomar um múltiplo do caminho trivial, isto é, existirá $\lambda \in k$ tal que $\phi_x = \lambda 1_x$. Então $\lambda(1_{Fx}) \in R(Fx,Fy) = R(Fx,Fx)$. Como em $R(Fx,Fx)$ só existem morfismos não ismorfismos, devemos ter necessariamente $\lambda = 0$, e $\phi_z \in \tilde{R}k(\tilde{\Gamma})(x,z)$ para todo z. Disto (H_0) vale.

Suponha agora que, para $n \geq 0$, (H_n) é válida. Seja $(\phi_z)_z \in \bigoplus_{Fz=Fy} k(\tilde{\Gamma})(x,z)$ tal que $\sum_z F(\phi_z) \in R^{n+2}(Fx,Fy)$. Como $R^{n+2}(Fx,Fy) \subset R^{n+1}(Fx,Fy)$, e a hipótese (H_n) é válida, então $\phi_z \in \tilde{R}^{n+1} k(\tilde{\Gamma})(x,z)$, para todo z. E como $\sum_z F(\phi_z) \in R^{n+2}(Fx,Fy)$ e F_{n+2} é sobrejetora, existe, para cada z, ψ_z pertencente a $\tilde{R}^{n+2} k(\tilde{\Gamma})(x,z)$ tal que

$\sum_z F(\phi_z) = \sum_z F(\psi_z) mod\ R^{n+3}(Fx, Fy)$. Então $\sum_z F(\phi_z - \psi_z) \in R^{n+3}(Fx, Fy)$, donde, pelo Lema (3.6), existe, para cada i, $h_i \in R^{n+2}(Fx_i, Fy)$ e flechas $\alpha_i : x \to x_i$ com $1 \le i \le r$ e

$$\sum_z F(\phi_z - \psi_z) = \sum_{i=1}^{r} h_i F(\bar{\alpha}_i)$$

Do fato de ψ_z e $\phi_z \in \tilde{R}^{n+1}k(\tilde{\Gamma})(x,z) \subset \tilde{R}k(\tilde{\Gamma})(x,z)$, existe para cada z uma decomposição

$$\phi_z - \psi_z = \sum_i \theta_{z,i} \bar{\alpha}_i$$

com $\theta_{z,i} \in \tilde{R}^n k(\tilde{\Gamma})(x_i, z)$, para todo i. Dessas considerações deduzimos que

$$\sum_i \Big(\sum_z F(\theta_{z,i}) - h_i \Big) F(\bar{\alpha}_i) = 0. \qquad (*)$$

Podemos ter x injetivo ou não. Suponha x injetivo. Então $Fx = \pi x$ é injetivo, pois π é funtor recobrimento. Como o morfismo $[F(\bar{\alpha}_1)\ \cdots\ F(\bar{\alpha}_r)]$ é irredutível e Fx é injetivo, $[F(\bar{\alpha}_1)\ \cdots\ F(\bar{\alpha}_r)]$ é epimorfismo, donde em $(*)$ devemos ter que, para todo i, $\sum_z F(\theta_{z,i}) - h_i = 0$, ou seja, $\sum_z F(\theta_{z,i}) = h_i \in R^{n+2}(Fx_i, Fy)$ que está contido em $R^{n+1}(Fx_i, Fy)$. Pela hipótese de indução, temos $\theta_{z,i} \in \tilde{R}^{n+1}k(\tilde{\Gamma})(x_i, z)$, para todo i, donde $\sum_i \theta_{z,i}\bar{\alpha}_i \in \tilde{R}^{n+2}k(\tilde{\Gamma})(x,z)$, e como ψ_z também pertence a $\tilde{R}^{n+2}k(\tilde{\Gamma})(x,z)$, temos

$$\phi_z = \psi_z + \sum \theta_{z,i}\bar{\alpha}_i \in \tilde{R}^{n+2}(x,z)$$

para todo z, e portanto (H_{n+1}) vale no caso em que x é injetivo.

Assuma agora que x não é injetivo. Seja então a malha em $\tilde{\Gamma}$ começando em x da forma

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & x_1 \arrow[dr, "\beta_1"] & \\ x \arrow[ur, "\alpha_1"] \arrow[dr, "\alpha_r"'] & \vdots & \tau^{-1}x \\ & x_r \arrow[ur, "\beta_r"'] & \end{tikzcd}$$

Como F é funtor bem comportado, para essa malha temos a sequência quase cindida

$$0 \longrightarrow Fx \xrightarrow{[F(\bar{\alpha}_1)\cdots F(\bar{\alpha}_r)]^t} \bigoplus_{i=1}^{r} Fx_i \xrightarrow{[F(\bar{\beta}_1)\cdots F(\bar{\beta}_r)]} \tau^{-1}Fx \longrightarrow 0$$

De $(*)$ podemos dizer que:

$$[\sum_z F(\theta_{z,1}) - h_1 \cdots \sum_z F(\theta_{z,r}) - h_r][F\bar{\alpha}_1 \cdots F\bar{\alpha}_r]^t = 0.$$

Pela propriedade do conúcleo, temos então que $\sum_{i=1}^{r}(\sum_z F(\theta_{z,i}) - h_i)$ se fatora por $[F(\bar{\beta}_1), \cdots, F(\bar{\beta}_r)]$, isto é, existe um morfismo $h \in \mathrm{Hom}_A(\tau^{-1}(Fx), Fy)$ tal que

$$[F\bar{\beta}_1 \cdots F\bar{\beta}_r] \circ h = [\sum_z F(\theta_{z,1}) - h_1 \cdots \sum_z F(\theta_{z,r}) - h_r].$$

Logo, para $1 \leq i \leq r$, temos que $\sum_z F(\theta_{z,i}) - h_i = hF(\bar{\beta}_i)$.

Como $h \in Hom_A\,(\tau^{-1}Fx, Fy)$, e F_0 é sobrejetora, existe $(\chi_{1,z})_z \in \bigoplus_{Fz=Fy} k(\tilde{\Gamma})(\tau^{-1}x, z)$ tal que

$$h = \sum_z F(\chi_{1,z})\ mod\ R(\tau^{-1}Fx, Fy).$$

Como $(\theta_{z,i}) \in \bigoplus_{Fz=Fy} \tilde{R}^n(x_i, z)$, e $\tilde{\Gamma}$ é com comprimento, os caminhos de x_i para z têm comprimento maior ou igual à n. Como temos flecha de x_i para $\tau^{-1}x$, os caminhos de $\tau^{-1}x$ para z têm comprimento maior ou igual à $n-1$, donde

$$\sum_z F(\chi_{1,z}) \in R^{n-1}(\tau^{-1}Fx, Fy) \subseteq R(\tau^{-1}Fx, Fy)$$

e portanto, como $h = \sum_z F(\chi_{1,z})\ mod\ R(\tau^{-1}Fx, Fy)$, h pertence à $R(\tau^{-1}Fx, Fy)$.

Usando o fato de serem F_1, F_2, $\cdots$, F_{n-1} sobrejetoras, e com os mesmos argumentos feitos anteriormente, concluímos que existe $(\chi_z)_z \in \bigoplus_{Fz=Fy} k(\tilde{\Gamma})(\tau^{-1}x, z)$ tal que

$$h = \sum_z F(\chi_z)\ mod\ R^n(\tau^{-1}Fx, Fy).$$

Disto, para cada i,

$$hF(\bar{\beta}_i) = \sum_z F(\chi_z)F(\bar{\beta}_i)\ mod\ R^{n+1}(Fx_i, Fy).$$

Como $hF(\bar{\beta}_i) = \sum_z F(\theta_{z,i}) - h_i$, então

$$\sum_z F(\theta_{z,i}) - h_i = \sum_z F(\chi_z \bar{\beta}_i) \; mod \; R^{n+1}(Fx_i, Fy).$$

E como $h_i \in R^{n+2}(Fx_i, Fy) \subseteq R^{n+1}(Fx_i, Fy)$, temos que $\sum_z F(\theta_{z,i} - \chi_z \bar{\beta}_i) \in R^{n+1}(Fx_i, Fy)$, donde pela hipótese de indução $(\theta_{z,i} - \chi_z \bar{\beta}_i)_z \in \bigoplus_{Fz=Fy} \tilde{R}^{n+1} k(\tilde{\Gamma})(x_i, z)$, para todo i. E como $\sum_i \overline{\beta_i}\overline{\alpha_i} = 0$, temos que $\sum_i \theta_{z,i}\overline{\alpha_i} = \sum_i (\theta_{z,i}\overline{\alpha_i} + \chi_z \overline{\beta_i \overline{\alpha_i}})$, para todo z. Mas para todo z

$$\phi_z = \psi_z + \sum_{i=1}^{r} \theta_{z,i}\overline{\alpha_i}$$

donde

$$\phi_z = \psi_z + \sum_{i=1}^{r} (\theta_{z,i} - \chi_z \bar{\beta}_i)\bar{\alpha}_i$$

como ψ_z e $\sum_{i=1}^{r} (\theta_{z,i} - \chi_z \bar{\beta}_i)\bar{\alpha}_i$ pertencem a $\tilde{R}^{n+2} k(\tilde{\Gamma})(x, z)$, para todo z, segue que ϕ_z pertence a $\tilde{R}^{n+2} k(\tilde{\Gamma})(x, z)$, para todo z, donde (H_{n+1}) é válida. Disto, para todo n, (H_n) é válida, isto é, para todo n, F_n é injetora.

b) Mostraremos apenas que a primeira aplicação é injetora, pois para a outra alpicação o raciocínio é análogo. Seja então $(\varphi_z)_z \in \bigoplus_{Fz=Fy} k(\tilde{\Gamma})(x, z)$ tal que $\sum_z F(\varphi_z) = 0$. Então, para todo $n \geq 0$, $\sum_z F(\varphi_z) \in R^n(Fx, Fy)$. Como F_n é injetora para todo $n \geq 0$, teremos então que, para todo z, $\varphi_z \in \tilde{R}^n k(\tilde{\Gamma})(x, z)$. Mas pelo Teorema (2.4), $\tilde{\Gamma}$ é aljava com comprimento, donde existe um $l \geq 0$ tal que os caminhos de x para z têm comprimento l, donde $\tilde{R}^t k(\tilde{\Gamma})(x, z) = 0$, para todo $t > l$. Como $\varphi_z \in \tilde{R}^n k(\tilde{\Gamma})(x, z)$, para todo $n \geq 0$, devemos ter $\varphi_z = 0$, para todo z, donde $(\varphi_z)_z = 0$ □

Corolário 3.8. *Seja $F : k(\tilde{\Gamma}) \to ind\,\Gamma$ um funtor bem comportado. Então, Γ é estândar generalizada se, e somente se, F é funtor recobrimento.*

Demonstração: Assuma primeiramente que Γ é estândar generalizada. Para F ser funtor recobrimento basta, pela Definição (2.1), que as aplicações dadas no Teorema (3.7) (b) sejam sobrejetoras. Mostraremos isso para o primeiro caso. Seja então $f \in Hom_A\,(Fx, Fy)$. Como Γ é estândar generalizada, existe um $n \geq 0$ tal que $R^n(Fx, Fy) = 0$. Como F_0 é sobrejetora, existe $(\varphi_{0,z})_z \in \bigoplus_{Fz=Fy} k(\tilde{\Gamma})(x, z)$ tal que

$f = \sum_z F(\varphi_{0,z})\ mod\ R(Fx, Fy)$. Disto $f - \sum_z F(\varphi_{0,z})$ pertence a $R(Fx, Fy)$. Como F_1 é sobrejetora, existe $(\varphi_{1,z})_z$ pertencente a $\bigoplus_z \tilde{R}k(\tilde{\Gamma})(x,z)$ tal que $f - \sum_z F(\varphi_{0,z}) = \sum_z F(\varphi_{1,z})\ mod\ R^2(Fx, Fy)$. Seguindo com este raciocínio, concluímos que existe $(\varphi_{n-1,z})_z \in \bigoplus_{Fz=Fy} \tilde{R}^{n-1}k(\tilde{\Gamma})(x,z)$ tal que $f - \sum_{i=1}^{n-2}\sum_z F(\varphi_{i,z}) = \sum_z F(\varphi_{n-1,z}) mod R^n(Fx, Fy)$. E sendo $R^n(Fx, Fy) = 0$, concluímos que $f = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_z F(\varphi_{i,z})$, e portanto a primeira aplicação de (b) é sobrejetora, sendo assim bijetora.

Reciprocamente, suponha que F é um funtor recobrimento. Queremos ver que dados $Fx,\ Fy \in \Gamma_0$, existe $n \geq 0$ tal que $R^n(Fx, Fy) = 0$. Como $Hom_A(Fx, Fy)$ tem dimensão finita, uma vez que A é de dimensão finita e $Fx,\ Fy$ são A-módulos finitamente gerados, e a função dada no Teorema (3.7) (b) é injetora, existe apenas um número finito de $z \in \tilde{\Gamma}_0$ tal que $Fz = Fy$ e $k(\tilde{\Gamma})(x,z) \neq 0$. Como $\tilde{\Gamma}$ é com comprimento e existem apenas finitos z, existirá um $n \geq 0$ tal que $\tilde{R}^n k(\tilde{\Gamma})(x,z) = 0$, para todo z tal que $Fz = Fy$. Daí, se existisse $f \in R^n(Fx, Fy)$ não nula, como F_n é sobrejetora e vale (H_n), deveria existir $(\varphi_z)_z \in \bigoplus_{Fz=Fy} \tilde{R}^n k(\tilde{\Gamma})(x,z)$ tal que $f = \sum_z F(\varphi_z) mod\ R^n(Fx, Fy)$, o que é uma contradição pelo observado acima. Disto $R^n(F(x), F(y)) = 0$. Como isso é válido para quaisquer dois vértices em Γ, temos que Γ é estândar generalizada $\square$

Capítulo 4

Grau de morfismo irredutível

Aqui procuraremos apresentar algumas propriedades obtidas a partir da análise do grau de morfismo irredutível (que definiremos a seguir), demonstradas com o uso da definição de recobrimento de aljava com translação, dada no Capítulo 2. Com isso, mostraremos uma relação entre o grau do morfismo irredutível e o fato de ser a álgebra do tipo de representação finito.

Assumiremos nas seções 4.2 e 4.3 que A é uma k-álgebra de dimensão finita e básica, com k corpo algebricamente fechado.

Os principais resultados deste capítulo podem ser encontrados em [10].

4.1 Grau de morfismo irredutível

Definição 4.1. *(ver[13]) Seja A uma álgebra de artin. Dado um morfismo irredutível $f : X \to Y$ em mod A, com X ou Y indecomponível, diremos que* **o grau à esquerda de** *f é infinito se, para cada $n \geq 1$, cada módulo $Z \in$ mod A, e cada morfismo $g \in R^n(Z,X) \setminus R^{n+1}(Z,X)$, temos que $fg \notin R^{n+2}(Z,Y)$. Do contrário, o grau à esquerda de f é o menor inteiro $m \geq 1$ tal que existe um módulo $Z \in mod\ A$ e um morfismo $g \in R^n(Z,X) \setminus R^{n+1}(Z,X)$ tal que $fg \in R^{n+2}(Z,Y)$.*

Denotamos o grau à esquerda de f por $d_l(f)$.

Definição 4.2. *(ver[13]) Seja A uma álgebra de artin. Dado um morfismo irredutível $f : X \to Y$ em $mod\ A$, com X ou Y indecomponível, diremos que* **o grau à direita de** *f é infinito se, para cada $n \geq 1$, cada módulo $Z \in$ mod A, e cada morfismo $g \in R^n(Y,Z) \setminus R^{n+1}(Y,Z)$, temos que $gf \notin R^{n+2}(X,Z)$. Do contrário, o grau à direita de f é o menor inteiro $m \geq 1$ tal que existe um módulo $Z \in mod\ A$ e um morfismo $g \in R^n(Y,Z) \setminus R^{n+1}(Y,Z)$ tal que $gf \in R^{n+2}(X,Z)$.*

Denotamos o grau à direita de f por $d_r(f)$.

Exemplo 4.1. *1) Seja*

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$$

uma sequência quase cindida. Então, como X e Z são indecomponíveis e f e g são irredutíveis, $f \in R(X,Y) \setminus R^2(X,Y)$, $g \in R(Y,Z) \setminus R^2(Y,Z)$ e $gf = 0 \in R^\infty(X,Z)$, temos que $d_r(f) = 1$ e $d_l(g) = 1$.

2) Considere a aljava de Auslander-Reiten calculada no Exemplo (1.7)

$$\begin{tikzcd}
P(3) \arrow[dr, "f"] \arrow[rr, dash, dashed] & & S(2) \arrow[dr] \arrow[rr, dash, dashed] & & I(1) \\
& P(2) \arrow[ur, "g"] \arrow[dr] \arrow[rr, dash, dashed] & & I(2) \arrow[ur] & \\
& & P(1) \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

referente à algebra de caminhos dada pela aljava

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$$

Como $P(3) = S(3)$, então $R(X,P(3)) = 0$, para todo $X \in modA$, uma vez que $P(3)$ é simples e projetivo, pois se existisse algum morfismo não nulo em $R(X,P_3)$, então, por ser um morfismo de contradomínio simples, seria um epimorfismo. Mas como $P(3)$ é projetivo, seria um epimorfismo que cinde, donde $X \simeq P$, e portanto o morfismo somente poderia ser um isomorfismo. Como para todo módulo indecomponível X, $R(X,P(3)) = 0$ (e portanto $R^n(X,P(3)) = 0$, para todo $n \geq 1$), e temos um morfismo irredutível $f : P(3) \rightarrow P(2)$, temos que $d_l(f) = \infty$.

3) Seja por fim A a algebra de caminhos dada pela aljava

$$\begin{tikzcd}
& 1 \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "\gamma"] & \\
5 \arrow[dr, "\beta"'] & & 2 \arrow[d, "\delta"] \\
& 4 & 3 \arrow[l, "\epsilon"]
\end{tikzcd}$$

limitada pelas relaçõos $\alpha\beta = 0 = \delta\epsilon$. Então A é algebra do tipo de representação finita, e *sua aljava de Auslander-Reiten é:*

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & P(3) \arrow[rr, dash, dashed] \arrow[dr, "b_1"] & & S(5) \arrow[rrr, dash, dashed] \arrow[drr] & & & I(3) \arrow[dr] & & \\
P(4) \arrow[ur, "a_1"] \arrow[rr, dash, dashed] \arrow[ddr, "a_2"'] & & I(4) \arrow[ur, "f_1"] \arrow[ddr, "f_2"] & & & P(1) \arrow[ur] \arrow[rr, dash, dashed] \arrow[dr] & & I(2) \arrow[dr] & \\
 & & & & P(2) \arrow[ur] \arrow[rr, dash, dashed] \arrow[dr] & & M \arrow[ur] \arrow[rr, dash, dashed] \arrow[dr] & & I(1) \\
 & P(5) \arrow[uur, "b_2"] \arrow[rr, dash, dashed] & & S(3) \arrow[ur] \arrow[rr, dash, dashed] & & S(2) \arrow[ur] \arrow[rr, dash, dashed] & & I(5) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

Vejamos que $d_l((f_1\ f_2)^t) = 2$. *Como* $(f_1\ f_2)^t$ *não é morfismo minimal quase cindido à direita,* $d_l((f_1\ f_2)^t) > 1$, *pela propriedade* (4.2), *que veremos a seguir . Da sequência*

$$0 \longrightarrow P(4) \xrightarrow{(a_1\ a_2)^t} P(3) \oplus P(5) \xrightarrow{(b_1\ b_2)} I(4) \longrightarrow 0$$

temos que $b_1a_1 + b_2a_2 = 0$, *donde* $b_1a_1 = -b_2a_2$. *E das sequências*

$$0 \longrightarrow P(3) \xrightarrow{b_1} I(4) \xrightarrow{f_1} S(5) \longrightarrow 0$$

e

$$0 \longrightarrow P(5) \xrightarrow{b_2} I(4) \xrightarrow{f_2} S(3) \longrightarrow 0$$

temos que $f_1b_1 = 0 = f_2b_2$. *Disto* $f_1b_1a_1 = 0$. *Além disso, temos que* $b_1a_1 \notin R^3(P(4), I(4))$, *pois se estivesse, pelo teorema* (4.1), *que veremos a seguir, a sequência quase cindida começando em* $P(4)$ *seria da forma*

$$0 \to P(4) \to P(3) \to I(4) \to 0$$

o que não ocorre. Disto $b_1a_1 \in R^2(P(4), I(4)) \setminus R^3(P(4), I(4))$. *Tomando a composta* $(f_1\ f_2)^t(b_1a_1)$, *temos*

$$(f_1\ f_2)^t(b_1\ a_1) = (f_1b_1a_1\ \ f_2b_1a_1)^t = (f_1b_1a_1\ \ -f_2b_2a_2)^t = (0\ 0)^t.$$

Portanto $d_l(f_1\ f_2) = 2$.

Vejamos agora algumas propriedades obtidas a partir da análise do grau de um morfismo irredutível.

Tomemos dois morfismos $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ irredutíveis, com composta $gf \in$

$R^{n+1}(X,Z)$, com $n \geq 2$. Então existem $\tilde{Y}$ um A-módulo, $s : X \to \tilde{Y} \in R^n(X,\tilde{Y})$, $t : \tilde{Y} \to Z \in R(Y,Z)$ tal que $gf = ts$. Suponha Z indecomponível.

Considere o morfismo minimal quase cindido à direita $Y \oplus Y' \xrightarrow{(g\ g')} Z$. Então, como t está em $R(Y,Z)$, existe $(u\ u')^t : \tilde{Y} \to Y \oplus Y'$ com $gu + g'u' = t$. Daí, $gus + g'u's = ts = gf$, e portanto $g(us - f) + g'u's = 0$, isto é,

$$(g\ g')(us - f\ \ u's)^t = 0$$

Se Z fosse projetivo, $(g\ g')$ deveria ser monomorfismo, donde $(us - f\ u's)^t = 0$, donde teríamos que $us = f$. Mas como $s \in R^n(X,Y)$, com $n \geq 2$, f deveria pertencer a $R^n(X,Y)$, contradição com o fato de ser f irredutível. Disto Z não é projetivo.

Considere então a sequência quase cindida

$$0 \longrightarrow \tau Z \xrightarrow{(v\ v')^t} Y \oplus Y' \xrightarrow{(g\ g')} Z \longrightarrow 0$$

Como $(g\ g')(us - f\ u's)^t = 0$, por propriedade do núcleo, existe $\eta : X \to \tau Z$ com

$$(us - f\ u's)^t = (v\ v')^t \eta$$

Disto $us - f = v\eta$ e $u's = v'\eta$. Como então $f = us - v\eta$, e $s \in R^n$, $n \geq 2$, e f está em $R(X,Y) \setminus R^2(X,Y)$, devemos ter $v\eta \in R(X,Y) \setminus R^2(X,Y)$. E como v é irredutível, devemos ter η isomorfismo, donde $X \simeq \tau Z$.

E como $u's = v'\eta$, e sendo η isomorfismo, $v'\eta \in R(X,Y') \setminus R^2(X,Y')$, e $u's \in R^n(X,Y')$, com $n \geq 2$, chegaríamos a uma contradição. Daqui tiramos que a sequência quase cindida terminando em Z é da forma

$$0 \longrightarrow \tau Z \xrightarrow{v} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$$

Sendo assim, temos o seguinte:

Teorema 4.1. *Seja A uma álgebra de artin, e seja $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ morfismos irredutíveis com $X, Z \in ind\, A$. Se gf é um morfismo em $R^{n+1}(X,Z)$, com $n \geq 2$. Então:*
a) Z não é projetivo e $X \simeq \tau Z$.
b) Existem as seguintes sequências quase cindidas:

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{h} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0 \quad e \quad 0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{h'} Z \longrightarrow 0$$

Em [13], encontramos as seguintes propriedades que utilizaremos aqui:

Proposição 4.2. *(ver [13], 1.12) Seja $f : X \to Y$ um morfismo irredutível em $modA$, com X ou Y indecomponível.*

a) f é epimorfismo minimal quase cindido à direita se, e somente se, $d_l(f) = 1$.

b) f é monomorfismo minimal quase cindido à esquerda se, e somente se, $d_r(f) = 1$.

Dada uma flecha $f : X \to Y$ em $\Gamma(mod\,A)$, vimos no Capítulo 1 que a valoração de f em $\Gamma(mod\,A)$ é $(\alpha_{XY}, \alpha'_{XY})$ se $Y^{\alpha_{XY}}$ é somando do contradomínio do morfismo minimal quase cindido à esquerda começando em X e $X^{\alpha'_{XY}}$ é somando do domínio do morfismo minimal quase cindido à direita terminando em Y.

Proposição 4.3. *(ver [13], 1.7) Seja $X \to Y$ uma flecha em $\Gamma(modA)$ com valoração $(\alpha_{XY}, \alpha'_{XY})$. Se existe um morfismo irredutível $f : X \to Y$ que tem ou grau à esquerda finito ou grau à direita finito, então ao menos α_{XY} ou α'_{XY} é igual a 1.*

4.2 Grau de morfismo irredutível e recobrimento

No próximo teorema utilizaremos fortemente o Teorema (3.7).

Teorema 4.4. *Seja A uma k-álgebra de dimensão finita com k algebricamente fechado. Seja $f : X \to Y$ um morfismo irredutível com $X \in indA$ e Γ uma componente de $\Gamma(mod\,A)$ contendo X e $n \in \mathbb{N}$.*
a) Se $d_l(f) = n$, existe $Z \in \Gamma$ e $h \in R^n(Z, X) \setminus R^{n+1}(Z, X)$ tal que $fh = 0$.
b) Se $d_r(f) = n$, existe $Z \in \Gamma$ e $h \in R^n(Y, Z) \setminus R^{n+1}(Y, Z)$ tal que $hf = 0$.

Demonstração: Decompondo $Y = Y_1 \oplus \cdots \oplus Y_r$, teremos que $f = [f_1 \cdots f_r]^t$, com $f_i : X \to Y_i$. Assim tomando $\pi : \tilde{\Gamma} \to \Gamma$ o recobrimento genérico de Γ, existirá em $\tilde{\Gamma}$ uma subaljava da forma

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & x_1 \\ x \arrow[ur, "\alpha_1"] \arrow[dr, "\alpha_r"'] & \vdots \\ & x_r \end{tikzcd}$$

com $\pi x_i = Y_i$, para cada i. Daí, pelo Corolário (3.5), existirá $F : k(\tilde{\Gamma}) \to ind\,\Gamma$ um funtor bem comportado tal que $F(\overline{\alpha}_i) = f_i$, para todo i. Visto isso, vejamos a demonstração do teorema.

a) Como $d_l(f) = n$, existe $Z \in mod\,A$ e $g \in R^n(Z, X) \setminus R^{n+1}(Z, X)$ com $fg \in R^{n+2}(Z, Y)$, donde $f_i g \in R^{n+2}(X, Y_i)$. Como g pertence a $R^n(Z, Y)$, pelo Teorema (3.7), existe $(\phi_z)_z \in \tilde{R}^n k(\tilde{\Gamma})(z,x)$ tal que $g = \sum_z F(\phi_z) mod\ R^{n+1}(Z,X)$. E como $g \notin R^{n+1}(Z,X)$, concluímos que existe algum z_0 tal que ϕ_{z_0} não está em $\tilde{R}^{n+1}k(\tilde{\Gamma})(z_o,x)$. Dai, para todo i, $f_i g = \sum_z F(\bar{\alpha}_i \phi_z) mod\ R^{n+2}(Z, Y_i)$. E como $f_i g \in R^{n+2}(Z, Y_i)$, novamente pelo Teorema (3.7) temos $\overline{\alpha_i}\phi_z \in \tilde{R}^{n+2}k(\tilde{\Gamma})(z,x_i)$, para todo z e todo i. Mas como $\phi_{z_0} \notin \tilde{R}^{n+1}k(\tilde{\Gamma})(z_o,x)$, temos que os caminhos de $\tilde{\Gamma}$ de z_0 para x têm comprimento no máximo n, e portanto um caminho de z_0 para x_i tem comprimento no máximo $n+1$. Como $\overline{\alpha_i}\phi_{z_0} \in \tilde{R}^{n+2}k(\tilde{\Gamma})(z_0,x_i)$, temos necessariamente $\overline{\alpha_i}\phi_{z_0} = 0$, para todo i. Tomando então $h = F(\phi_{z_0})$, temos que $fh = \sum_i F(\overline{\alpha_i}\varphi_{z_0}) = 0$, e $h \in R^n(Z,X) \setminus R^{n+1}(Z,X)$.

b) Como $d_r(f) = n$, existe $g = [g_1, \cdots, g_r]$ com $g \in R^n(Y,Z) \setminus R^{n+1}(Y,Z)$ e $gf \in R^{n+2}(X,Z)$. Como $g \in R^n(Y,Z) \setminus R^{n+1}(Y,Z)$, para todo $1 \le i \le r$ $g_i : Y_i \to Z \in R^n(Y_i,Z)$, e como $g \notin R^{n+1}(Y,Z)$, existe algum j com $g_j \in R^n(Y_j,Z) \setminus R^{n+1}(Y_j,Z)$. Novamente pelo Teorema (3.7) existe $\phi_{j,z} \in \bigoplus \tilde{R}^n k(\tilde{\Gamma})(x_j,z)$ com $g_j = \sum_z F(\phi_{j,z}) mod\ R^{n+1}(Y_j,Z)$. E como $g_j \notin R^{n+1}(Y_j,Z)$, existirá algum z_0 tal que $\phi_{j,z_0} \notin \tilde{R}^{n+1}k(\tilde{\Gamma})(x_j,z_0)$. Disto, os caminhos de x_j para z_0 têm todos comprimento no máximo n, donde os caminhos de x para z_0 passando por x_j, e portanto todos os caminhos de x para z_0, têm comprimento no máximo $n+1$. Mas $gf = \sum g_i f_i = \sum F(\sum \phi_{i,z}\bar{\alpha}_i) \mathrm{mod} R^{n+2}(X,Z)$ está em $R^{n+2}(X,Z)$, donde $\sum \phi_{i,z}\bar{\alpha}_i \in \tilde{R}^{n+2}k(\tilde{\Gamma})(x,z)$, para todo z. Com isso, temos necessariamente que $\sum \phi_{i,z_o}\bar{\alpha}_i = 0$. Tomando $h = [F(\phi_{1,z_0}) \ \cdots \ F(\phi_{r,z_0})]$, teremos que $hf = F(\sum_i \varphi_{i,z_0}\bar{\alpha}_i) = 0$, e $h \notin R^{n+1}(Y,Z)$ $\square$

Corolário 4.5. *Seja A uma k-álgebra de dimensão finita com k algebricamente fechado. Seja $f : X \to Y$ um morfismo irredutível com $X \in ind A$ e Γ uma componente de $\Gamma(mod A)$ contendo X.*

1. *Se $d_l(f) = n$, f é um epimorfismo.*
2. *Se $d_r(f) = n$, f é um monomorfismo.*

Em particular, se f é monomorfismo minimal quase cindido à esquerda, $d_l(f) = \infty$, e se f é epimorfismo minimal quase cindido à direita, $d_r(f) = \infty$

Demonstração:
a) Suponha que $d_l(f) = n$. Se f fosse monomorfismo, como pelo Teorema (4.4) existe $Z \in \Gamma$ e $h : Z \to X$ tal que $fh = 0$, deveríamos ter que $h = 0$, o que não ocorre uma vez que $h \in R^n(Z,X) \setminus R^{n+1}(Z,X)$.
b) Análogo à (a).

Disto concluímos que se $d_l(f) = n$, $d_r(f) = \infty$, e reciprocamente. Como pela Proposição (4.2) f é morfismo minimal quase cindida à esquerda se, e somente se, $d_r(f) = 1$, neste caso $d_l(f) = \infty$. Da mesma forma, se f é morfismo minimal quase cindido à direita, $d_r(f) = \infty$ □

O resultado dado no Teorema (4.4) pode ser obtido mais facilmente se considerarmos Γ estândar generalizada convexa e com comprimento (ver [11], 3.7). Neste caso podemos tomar A uma álgebra de Artin. De fato, temos o:

Teorema 4.6. *Seja A uma álgebra de Artin e Γ componente estândar generalizada convexa e com comprimento e $f : X \to Y$ um morfismo irredutível, com $X, Y \in \Gamma$. Então:*
a) $d_r(f) = \infty$ se, e somente se, $gf \neq 0$, para todo morfismo não nulo $g : Y \to M$, para $M \in \Gamma$.
b) $d_l(f) = \infty$ se, e somente se, $fg \neq 0$, para todo morfismo não nulo $g : M \to X$, para $M \in \Gamma$.

Demonstração: Mostraremos somente a afirmação (a), a (b) se demonstra de maneira análoga.

Suponha que $gf \neq 0$, para todo $g : Y \to M$, com $M \in \Gamma$. Em particular, para todo $g \in R^n(Y,M) \setminus R^{n+1}(Y,M)$, $gf \neq 0$. Nessas condições, pelo Teorema (1.21), existe caminho de irredutíveis de comprimento n de Y para M. E como f é irredutível, existe caminho de irredutíveis de comprimento $n+1$ de X para M. Como Γ é componente com comprimento, qualquer outro caminho em Γ de X para M terá então comprimento $n+1$. Vejamos que $gf \notin R^{n+2}(X,M)$. De fato, se $gf \in R^{n+2}(X,M)$, existiriam pelo Teorema (1.21) $N = \bigoplus_{i=1}^{r} M_i$, com cada M_i um A-módulo indecomponível, e morfismos h_i, h'_i, com $h'_i \in R(X,M_i)$, e h_i soma de composta de $n+1$ morfismos irredutíveis entre M_i e M. Estando X e M em Γ, e sendo Γ convexa, cada M_i estaria em Γ. Como $h'_i \in R(X,M_i)$ e Γ é estândar generalizada, existe $t_i \geq 1$ tal que $h'_i \in R^{t_i}(X,M_i) \setminus R^{t_i+1}(X,M_i)$. Disto pelo Teorema (1.21) $h'_i = u + v$, com u soma de composta de morfismos irredutíveis e $v \in R^{t_i+1}(X,M_i)$. Disto, teríamos um caminho de irredutíveis de comprimento maior ou igual à $n+2$ entre X e M. Mas Γ é componente com comprimento, e portanto, uma vez que existe um caminho de comprimento $n+1$ entre X e M, qualquer outro caminho deve ter este mesmo comprimento. Portanto $gf \notin R^{n+2}(X,M)$. Disto, para todo n, $d_r(f) \neq n$, e portanto $d_r(f) = \infty$.

Reciprocamente, suponha que $gf = 0$, para algum morfismo $g : Y \to M$ não nulo, com $M \in \Gamma$. Como f é irredutível, g não pode ser isomorfismo, donde, como Y e M são indecomponíveis, $g \in R^n(Y,M)$, para algum n. Como Γ é estândar generalizada,

$R^\infty(Y,M)=0$, donde existe um m tal que $g\in R^m(Y,M)\setminus R^{m+1}(Y,M)$. E como $gf=0\in R^{m+2}(X,M)$, temos que $d_r(f)\leq m$. Pela contrapositiva, o resultado segue □

Usando o Teorema (4.4), podemos demonstrar os seguintes resultados:

Teorema 4.7. *Seja $f:X\to Y$ um morfismo irredutível em mod A com X indecomponível, Γ a componente de Auslander-Reiten de $\Gamma(mod\,A)$ contendo X e $n\geq 1$ um inteiro. São equivalentes:*
a) $d_l(f)=n$.
b) f não é monomorfismo e o morfismo $ker(f):Ker(f)\to X$ está em $R^n(Ker(f),X)$ mas não está em $R^{n+1}(Ker(f),X)$.
Tais condições implicam na seguinte:
c) f não é monomorfismo e $Ker(f)\in\Gamma$.
Se Γ é estândar generalizada, as três condições são equivalentes.

Demonstração: Assuma primeiramente que $d_l(f)=n$. Disto, existe h em $R^n(Z,X)\setminus R^{n+1}(Z,X)$ tal que $fh=0$. Disto f não é monomorfismo, donde pelo Teorema (1.12) $Ker(f)$ é indecomponível. E como $fh=0$, h se fatora por $ker(f)$, isto é, existe $p:Z\to Ker(f)$ tal que $h=ker(f)p$, o que implica que $ker(f)\in R^i(Ker(f),X)\setminus R^{i+1}(Ker(f),X)$, com $i\leq n$, e portanto $Ker(f)$ está na mesma componente que X. Mas como $f\,ker(f)=0$, $n=d_l(f)\leq i$, donde tem-se a igualdade, e portanto (a) implica (b) e (c).

Suponha agora que vale (b). Então já temos pelo argumentado anteriormente que $Ker(f)\in\Gamma$. E como $f\,ker(f)=0$, $d_l(f)=i\leq n$. E como (a) implica (b), devemos ter $i=n$, e portanto (b) implica (a) e (c).

Por fim, assuma Γ estândar generalizada e que vale (c). Como neste caso $R^\infty(Ker(f),X)=0$, existe $n>0$ com $ker(f)\in R^n(Ker(f),X)\setminus R^{n+1}(Ker(f),X)$, donde (c) implica (b), e portanto (a) □

Observação 3.1: Da demonstração acima podemos deduzir que p é isomorfismo, uma vez que tanto h quanto $ker(f)$ estão em $R^n\setminus R^{n+1}$, e $Ker(f)$ e Z são indecomponíveis.

Dados dois morfismos $f,\ g:X\to Y$, diremos que $f\cong g$ se esistem isomorfismos $\phi:X\to X$, $\psi:Y\to Y$ tal que o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi"'] & Y \arrow[d, "\psi"] \\ X \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

Com essa definição e a observação anterior, temos:

Corolário 4.8. *Dado um morfismo irredutível $f : X \to Y$, com X indecomponível. Se $d_l(f) = n$ e existe $Z \in ind\, A$ e $h \in R^n(Z,X) \setminus R^{n+1}(Z,X)$ tal que $fh = 0$, então $h \cong ker(f)$.*

Outra propriedade que pode ser obtida considerando o núcleo de um morfismo irredutível é a seguinte:

Corolário 4.9. *Sejam $f, f' : X \to Y$ morfismos irredutíveis em $mod\, A$ com X indecomponível. Então, se f tem grau à esquerda finito, $d_l(f) = d_l(f')$ e $Ker(f) = Ker(f')$.*

Demonstração: Decompondo $Y = \bigoplus_{i=1}^{r} Y_i$, com cada Y_i indecomponível, temos $f = [f_1 \cdots f_r]^t$ e $f' = [f'_1 \cdots f'_r]^t$. Suponha $d_l(f) = n < \infty$. Pela proposição (4.3) ou $\alpha_{XY_i} = 1$ ou $\alpha'_{XY_i} = 1$. Neste caso, pelo Teorema (1.23), f_i e f'_i são linearmente dependentes módulo $R^2(X, Y_i)$, ou seja, existem $\lambda_i \in k \setminus \{0\}$ e $r_i \in R^2(X, Y_i)$ com $f'_i = \lambda_i f_i + r_i$. Disto $d_l(f) = d_l(f')$. Daí, pelo Teorema (4.7), temos que a aplicação $ker(f) : Ker(f) \to X \in R^n(Ker(f), X) \setminus R^{n+1}(Ker(f), X)$. Mas $f'_i ker(f) = r_i ker(f) \in R^{n+2}(Ker(f), Y_i)$, para cada i. E pelo Teorema (4.4), existe h pertencente a $R^n(Ker(f), X) \setminus R^{n+1}(Ker(f), X)$ tal que $f'h = 0$. Disto, pelo Corolário (4.8), temos $Ker(f) \simeq Ker(f')$ □

O próximo exemplo mostra a importância de se considerar que $d_l(f) = n < \infty$ no corolário anterior.

Exemplo 4.2. *Seja A a algebra de caminhos dada pela seguinte aljava*

$$\begin{tikzcd} & 2 \arrow[dr] & \\ 1 \arrow[ur] \arrow[rr] & & 3 \end{tikzcd}$$

Então o quociente $f : I(3) \to I(1)$ é um morfismo irredutível de grau à esquerda infinito. Temos que $Ker(f)$ é

$$\begin{tikzcd} & k \arrow[dr, "1"] & \\ k \arrow[ur, "1"] \arrow[rr, "0"'] & & k \end{tikzcd}$$

Por outro lado, seja $\mu : I(3) \to I(1)$ a composta dos quocientes $I(3) \to I(2)$ e $I(2) \to I(1)$. Então $\mu \in R^2(I(1), I(3))$, e $f' = f + \mu$ é também um morfismo irredutível de $I(3)$ para $I(1)$

com $Ker(f')$ da forma

$$\begin{tikzcd} & k \arrow[dr, "1"] & \\ k \arrow[ur, "1"] \arrow[rr, "1"'] & & k \end{tikzcd}$$

Disto $Ker(f)$ e $Ker(f')$ não são isomorfos.

Vejamos agora um resultado envolvendo graus para uma álgebra do tipo de representação finita.

Teorema 4.10. *Seja A uma k-álgebra do tipo de representação finito e $f : X \to Y$ um morfismo irredutível com X ou Y indecomponível. São equivalentes:*
a) $d_l(f) < \infty$.
b) $d_r(f) = \infty$.
c) f é um epimorfismo.

Demonstração: Vamos assumir que X é indecomponível. O caso em que Y é indecomponível é feito de maneira análoga.

Suponha que $d_l(f) = n < \infty$. Então, pelo Corolátio (4.11), temos que f é um epimorfismo, bem como $d_r(f) = \infty$. Disto temos que (a) implica (b) e (c).

E se f não é um epimorfismo, então pelo Teorema (1.12) $Coker(f)$ é indecomponível, pertencendo então a $\Gamma(mod\,A)$. Como A é do tipo de representação finito, existe $n \geq 0$ com $coker(f) \in R^n(Y, Coker(f)) \setminus R^{n+1}(Y, Coker(f))$, donde teremos caminho de irredutíveis entre Y e $Coker(f)$, e portanto $Coker(f) \in \Gamma$. E como $(coker(f))f = 0$, temos $d_r(f) \leq n < \infty$. Assim, pela contrapositiva (b) implica (c).

Por fim, assuma que f é um epimorfismo. Então f não é um monomorfismo, donde $Ker(f) \in \Gamma(mod\,A)$. Novamente do fato de ser A do tipo de representação finito, concluímos que $ker(f) \in R^n(Ker(f), X) \setminus R^{n+1}(Ker(f), X)$, e portanto $Ker(f) \in \Gamma$. Dai, pelo Teorema (4.7) temos $d_l(f) = n$, e portanto (c) implica (a) $\square$

Este teorema tem sua versão dual, que apenas enunciaremos, pois sua demonstração é análoga.

Teorema 4.11. *Seja A uma álgebra do tipo de representação finito e $f : X \to Y$ um morfismo irredutível com X ou Y indecomponível. São equivalentes:*
a) $d_r(f) < \infty$.
b) $d_l(f) = \infty$.
c) f é um monomorfismo.

4.3 Álgebra do tipo de representação finito

Apresentaremos agora algumas propriedades que podem ser obtidas a partir da análise do grau de um morfismo irredutível, em especial no caso em que tomamos uma álgebra do tipo de representação finito.

Teorema 4.12. *Seja A uma k-álgebra de dimensão finita e básica.*
a) Seja S um A-módulo simples, $S \hookrightarrow I$ sua envolvente injetiva e $X \in ind\, A$ tal que S é somando direto de $soc(X)$. Assuma que $I \twoheadrightarrow I/soc(I)$ seja morfismo com grau à esquerda igual a $n < \infty$. Então existe um caminho em $\Gamma(mod\, A)$ começando em S, terminando em I, de comprimento no máximo n e passando por X. Em particular, X , S e I estão na mesma componente de $\Gamma(mod\, A)$.
b) Seja S um submódulo simples com cobertura projetiva $P \to S$ tal que $rad\, P \to P$ tem grau à direita igual a $n < \infty$ e se S é somando direto de $X/rad\, X$, para algum X em $ind\, A$, então existe um caminho em $\Gamma(mod\, A)$ começando em P, terminando em S e passando por X, de comprimento no máximo n. Em particular, X, P e S estão na mesma componente de $\Gamma(mod\, A)$.

Demonstração: Mostraremos apenas (a). A afirmação (b) se demonstra de maneira dual. Chamemos de ϕ o epimorfismo irredutível $I \twoheadrightarrow I/soc\,(I)$, e de i a envolvente injetiva $S \hookrightarrow I$. Como ϕ é um epimorfismo irredutível de grau n, temos pelo Teorema (4.7) que S pertence a Γ e $i \in R^n(S,I) \setminus R^{n+1}(S,I)$. Desde que S é somando direto de $soc\, X$, temos uma inclusão $f : S \to X$. Disto, como I é injetivo, i se fatora por f, isto é, existe $g : X \to I$ tal que $i = gf$. Como $i \in R^n(S,I) \setminus R^{n+1}(S,I)$, existem $l, m \geq 1$ tal que $f \in R^l(S,X) \setminus R^{l+1}(S,X)$ e $g \in R^m(X,I) \setminus R^{m+1}(X,I)$ e $l+m \leq n$. Disto, f e g são somas de compostas de morfismos irredutíveis, com ao menos uma dessas compostas de comprimento l e m, respectivamente. Disto, teremos caminho de irredutíveis

$$S \to \cdots \to X \to \cdots \to I$$

donde temos a validade do resultado □

Para o próximo teorema, faremos uso do seguinte resultado:

Lema 4.13. *Seja A uma k-álgebra de dimensão finita e básica, com k um corpo algebricamente fechado, e i, p vértices da aljava de A. Se existe flecha $\alpha : i \to p$, então $S(i) = soc\, I(i)$ é somando de $soc\,(I(p)/soc\, I(p))$.*

Demonstração: Vamos considerar $((I(p)/soc\, I(p))_a, \psi_\beta)$ a representação do quociente $I(p)/soc\, I(p)$, como descrita no Teorema (1.7). Provaremos que o k-espaço vetorial

$soc\,(I(p)/soc\,I(p))_i$, correspondente ao vértice i da aljava de A é não nulo. Sendo assim, o módulo simples $S(i)$ será somando de $soc\,(I(p)/soc\,I(p))$.

Seja $(I(p)_a, \varphi_a)$ a representação do injetivo $I(p)$. Como temos flecha $\alpha : i \to p$, e o espaço vetorial $(I(p))_i$ é, pelo Teorema (1.9), o dual do espaço com base o conjunto das classes $\bar{w}$, com w caminho de i para p, então $(I(p))_i = k^n$, para algum n maior ou igual à 1, pois existe flecha de i para p.

Tomemos agora o módulo $(I(p)/soc\,I(p))$. Seja $((I(p)/soc\,I(p))_a, \psi_\beta)$ sua representação. Então $(I(p)/soc\,I(p))_a = (I(p))_a$, para todo $a \neq p$, enquanto que em $(I(p)/soc\,I(p))_p$ teremos anulado o somando de $(I(p))_p$ correspondente ao caminho trivial e_p. Assim, para uma flecha $\gamma : i \to j$, com $j \neq p$, temos que $\psi_\gamma = \varphi_\gamma : (I(p))_i \to (I(p))_j$.

A aplicação φ_γ é o dual da aplicação $T_\gamma : (I(p))_j^* \to (I(p))_i^*$, que associa a cada caminho $u : j \rightsquigarrow p$ o caminho $\gamma u : i \rightsquigarrow p$. Como $j \neq p$, as flechas $\alpha : i \to p$ não serão imagem de nenhum caminho pela função T_γ. Ao dualizarmos, estaremos tomando funcionais lineares em $(I(p))_i$ e levando em funcionais lineares em $(I(p))_j$. Mais precisamente, ao tomarmos um funcional f_k, para k um caminho de i para p, levaremos este funcional no funcional f_l, com l um caminho de j para p, que é definido da seguinte forma

$$f_l = \begin{cases} 0, & \text{se } \gamma q \neq k \\ 1, & \text{se } \gamma q = k \end{cases}$$

Como $\gamma q \neq \alpha$, para toda flecha $\alpha : i \to p$, temos que $\overline{\alpha}$ está no núcleo de φ_γ, para toda flecha $\alpha : i \to p$.

E se tomarmos uma flecha $\alpha : i \to p$, a aplicação $\varphi_\alpha : (I(p))_i \to (I(p))_p$ teria apenas a classe da flecha $\alpha : i \to p$ com imagem não nula obtida através da multiplicação à direita de α pelo caminho trivial e_p. Podemos concluir isso usando a mesma argumentação feita acima para φ_γ, com $\gamma : i \to j$. Mas como em $(I(p)/soc\,I(p))_p$ temos anulado o somando correspondente ao caminho trivial e_p, temos novamente que todas as classes de flechas $\alpha : i \to p$ estão na base do núcleo da aplicação $\psi_\alpha : (I(p))_i \to (I(p)/soc\,I(p))_p$.

Como $soc\,(I(p)/soc\,I(p))_i = \bigcap_{\beta : i \to j} Ker\,(\psi_\beta : (I(p)/soc\,I(p))_i \longrightarrow (I(p)/soc\,I(p))_j)$, e para toda ψ_β, $Ker\,\psi_\beta$ tem na sua base as classes das flechas $\alpha : i \to p$, temos que $soc\,(I(p)/soc\,I(p))_i \neq \{0\}$, donde $S(i) = soc\,I(i)$ é somando de $(I(p)/soc\,I(p))_i$.

Teorema 4.14. *Assuma A conexa.*

a) Suponha que para cada injetivo indecomponível I o morfismo quociente $I \twoheadrightarrow I/soc\,(I)$ tem grau à esquerda finito. Seja n o supremo de todos esses graus à esquerda. Então, para cada $X \in ind\ A$ existe um caminho em $\Gamma(mod\ A)$ começando em X, terminando em algum injetivo e de comprimento no máximo n. Em particular, $\Gamma(mod\ A)$ é finita e *conexa.*

b) Suponha que para cada projetivo indecomponível I o morfismo inclusão rad $P \hookrightarrow P$ tem grau à direita finito. Seja n o supremo de todos esses graus à direita. Então, para cada $X \in ind\,A$ existe um caminho em $\Gamma(mod\,A)$ começando em algum projetivo, terminando em X e de comprimento no máximo n. Em particular, $\Gamma(mod\,A)$ é finita e conexa.

Demonstração: Demonstraremos apenas a afirmação (a), e (b) sendo feita de maneira dual. Seja $X \in ind\,A$. Como existe bijeção do conjunto de módulos simples não isomorfos e injetivos indecomponíveis não isomorfos, dado S submódulo de $soc\,X$, teremos $S \simeq soc\,I$, para algum I injetivo indecomponível. Disto, pelo teorema anterior a primeira afirmação se verifica.

Vejamos agora que $\Gamma(mod\,A)$ é conexa. Para isso, demonstraremos que dados I, J injetivos indecomponíveis, I e J estão na mesma componente de $\Gamma(mod\,A)$. Sejam então $I = I(j)$ e $J = I(l)$. Como A é conexa, sua aljava é conexa, donde, dados os vértices j e l da aljava de A, existe um passeio $j = 0 - 1 - \cdots - n = l$ ligando esses dois vértices, de tal forma que o passeio ligando os vértices $(i-1)$ e i seja uma flecha $(i-1) \to i$ ou uma flecha $i \to (i-1)$. Com isso, conseguimos um passeio $I(j) = I_0 - I_1 - \cdots - I_n = I(l)$ de morfismos irredutíveis entre os indecomponíveis $I(i)$ e $I(j)$ construído da seguinte forma: tomando $I(i-1)$ e $I(i)$, como temos flecha $(i-1) \to i$ ou uma flecha $i \to (i-1)$, temos pelo lema anterior que $S(i)$ é somando de $soc\,(I(i-1)/soc\,I(i-1))$ ou $S(i-1)$ somando de $soc\,(I(i)/soc\,I(i))$. Suponha que ocorra a primeira possibilidade. Então, tomando $X = I(i-1)/soc\,I(i-1)$ no teorema anterior, temos caminho de morfismos irredutíveis entre X e $I(i)$. E como existe morfismo irredutível $I(i-1) \to I(i-1)/soc\,I(i-1)$, temos caminho de irredutíveis de $I(i-1)$ para $I(i)$. Assumindo o outro caso, chegamos a um caminho de irredutíveis entre $I(i)$ e $I(i-1)$. Disto conseguimos conectar I e J por meio de passeio de irredutíveis, donde I e J estão na mesma componete de $\Gamma(mod\,A)$. Desta forma temos que todos os injetivos estão na mesma componente de $\Gamma(mod\,A)$, e como pela primeira afirmação do teorema todos os vértices de $\Gamma(mod\,A)$ estão conectados à um injetivo, $\Gamma(mod\,A)$ é conexa.

Vejamos por fim que $\Gamma(mod\,A)$ é finita. Suponha que existam infinitos elementos em $ind\,A$. Para cada indecomponível, existe um caminho de irredutíveis de comprimento no máximo n chegando em um módulo injetivo indecomponível. Como existem somente finitos módulos injetivos indecomponíveis não isomorfos, haveria um módulo injetivo I de tal modo que existiriam infinitos módulos indecomponíveis e infinitos caminhos de morfismos irredutíveis de comprimento no máximo n de cada um desses infinitos módulos para I. Como Γ é localmente finita, teríamos uma contradição. Disto $ind\,A$ deve ser finita, isto é, $\Gamma(mod\,A)$ é finita □

Podemos agora demonstrar o principal resultado deste capítulo.

Teorema 4.15. *Seja A k-álgebra conexa de dimensão finita sobre corpo algebricamente fechado. As seguintes condições são equivalentes:*
a) A é do tipo de representação finito;
b) Para cada A-módulo projetivo P indecomponível, a inclusão $rad(P) \to P$ tem grau à direita finito;
c) Para cada A-módulo injetivo I indecomponível, o quociente $I \to I/soc(I)$ tem grau à esquerda finito;
d) Para cada epimorfismo irredutível $f : X \to Y$ com X ou Y indecomponível, o grau à esquerda de f é finito;
e) Para cada monomorfismo irredutível $f : X \to Y$ com X ou Y indecomponível, o grau à direita de f é finito.

Demonstração: Suponha que A é do tipo de representação finito. Neste caso, pelo Teorema (4.10) todo epimorfismo irredutível tem grau à esquerda finito, e pelo Teorema (4.11), todo monomorfismo irredutível tem grau à direita finito. Disto (a) implica (d) e (e). Como a inclusão $rad\,P \hookrightarrow P$ é monomorfismo irredutível e o quociente $I \twoheadrightarrow I/soc\,I$ é epimorfismo irredutível, temos que (a) implica (b) e (c). Do Teorema (4.14) temos que (b) e (c) implicam (a), e portanto as três implicações são equivalentes. Além disso, (d) implica (c) e (e) implica (b) diretamente. Portanto, temos que todas as afirmações são equivalentes $\square$

Referências Bibliográficas

[1] I. Assem. *Algèbres et modules.* Masson, 1997.

[2] I. Assem, D. Simson, and A. Skowroński. *Elements of the representation theory of associative algebras*, volume 65 of *London Math. Soc. Stud. texts.* Cambridge University Press, 2006.

[3] M. Auslander, I. Reiten, and S. SmalØ. *Representation theory of artin algebras*, volume 36 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics.* Cambridge University Press, 1995.

[4] R. Bautista and S. SmalØ. Noexistent cycles. *Comm. Algebra*, 11(16):1755–1767, 1983.

[5] W. C. Boevey, D. Happel, and C. M. Ringel. A bypass of an arrow is sectional. *Arch. Math*, 58:525–528, 1992.

[6] K. Bongartz and P. Gabriel. Covering spaces in representation. *Invent. Math.*, 1982.

[7] R. O. Buchweitz and S. Liu. Dimension of the mesh algebra of a finite Auslander-Reiten quiver. *Comm. Algebra*, 31(5):2207–2217, 2003.

[8] C. Chaio. Degrees of irreducible morphisms in standard components. *J. of Pure and Applied Math.*, 214(7):1063–1075, 2010.

[9] C. Chaio, F. U. Coelho, and S. Trepode. On the composite of two irreducible morphisms in the radical cube. *J. Algebra*, 312:650–667, 2007.

[10] C. Chaio, P. L. Meur, and S. Trepode. Degrees of irreducible morphisms and finite-representation type. *To appear in L. Math. Soc*, 2011.

[11] C. Chaio, M. I. Platzeck, and S. Trepode. On the degree of irreducible morphisms. *J. Algebra*, 281:200–224, 2008.

[12] C. Chaio and S. Trepode. The composite of irreducible morphisms in standard components. *J. Algebra*, 323(4):1000–1011, 2010.

[13] S. Liu. Degrees of irreducible maps and the shapes of Auslander-Reiten quivers. *J. London Math. Soc.*, 45(2):32–54, 1992.

[14] S. Liu. Shapes of connected components of the Auslander-Reiten quiver of artin algebras. *Amer. Math. Soc, Providence, RI*, pages 109–137, 1996.

[15] P. L. Meur. Revêtements galoisiens et groupe fondamental d'algébres de dimensin finie. *PhD thesis*, 2006.

[16] C. Riedtmann. Algebren, Darstellungsköcher, Ueberlagerungen und Zurück. *Comm. Math. Helv.*, 55:199–224, 1980.